ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN MINH THUẬN

VÀNH ĐỊA PHƯƠNG CHÍNH QUY

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2013

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan các kết quả nghiên cứu được trình bày trong luận văn này là hoàn toàn trung thực, chưa được sử dụng cho bảo vệ một học vị nào. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn đã được sự đồng ý của các cá nhân và tổ chức. Các thông tin, tài liệu trình bày trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2013

Học viên

Nguyễn Minh Thuận

Xác nhận của trưởng khoa chuyên môn	**Xác nhận của người hướng dẫn khoa học**
	TS. Đoàn Trung Cường

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự chỉ bảo và hướng dẫn tận tình của *TS. Đoàn Trung Cường*. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn và giải đáp các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin bầy tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin gửi tới các thầy cô Khoa Toán, Khoa Sau đại học Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên cũng như các thầy, cô ở viện toán học - viện khoa học và công nghệ Việt Nam đã tham gia giảng dạy khóa học 2011-2013, lời cảm ơn sâu sắc nhất về công lao dạy dỗ trong suốt quá trình giáo dục, đào tạo của nhà trường.

Tôi xin cảm ơn Sở Nội vụ, Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Lào Cai, Trường THPT số 1 Mường Khương, tổ Toán-Tin Trường THPT số 1 Mương Khương nơi tôi đang công tác đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học này.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và người thân đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên, cổ vũ để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2013

Học viên

Nguyễn Minh Thuận

Mục lục

Mở đầu

Cho $(R, \mathfrak{m}, k)$ là một vành địa phương Noether với iđêan cực đại duy nhất $\mathfrak{m}$. Gọi $\mu(\mathfrak{m})$ là số phần tử sinh tối tiểu của $\mathfrak{m}$. Ta luôn có

$$\mu(\mathfrak{m}) \geq \dim R.$$

Nếu đẳng thức xảy ra, tức là $\mu(\mathfrak{m}) = \dim R$, thì R được gọi là vành địa phương chính quy. Khái niệm vành địa phương chính quy lần đầu tiên được đưa ra bởi *Wolfang Krull* vào năm 1937. Tuy nhiên nó chỉ thực sự được quan tâm trong cuốn sách của *Oscar Zariski* vài năm sau đó. Trong cuốn sách đó Zariski đã chỉ ra vai trò đặc biệt quan trọng của vành chính quy trong hình học đại số. Ông đã chứng minh rằng một điểm trên một đa tạp đại số là không kỳ dị khi và chỉ khi vành các hàm chính quy tại điểm đó là vành địa phương chính quy. Từ đó các vành địa phương chính quy đã được rất nhiều nhà toán học nghiên cứu cũng như tìm hiểu các ứng dụng trong đại số, lý thuyết số và hình học đại số.

Sự ra đời của đại số đồng điều đã bổ sung thêm một công cụ mới đặc biệt hữu ích cho việc chứng minh các tính chất của vành chính quy. Các nhà toán học Auslander- Buchsbaum- Serre đã chứng minh được rằng một vành địa phương là chính quy khi và chỉ khi mọi môđun hữu hạn sinh đều có chiều xạ ảnh hữu hạn. Dựa vào đó họ đã chứng minh sự bảo toàn qua địa phương hoá của tính chính quy một cách đơn giản (Một định lý mà trước đấy chứng minh hết sức phức tạp). Đồng thời các nhà toán học Auslander- Buchsbaum-Nagata cũng chứng minh được một tính chất quan trọng khác của vành chính quy là tính phân tích duy nhất.

Mục đích của luận văn là trình bày lại chi tiết định nghĩa và một số tính chất cơ bản của vành chính quy được trình bày trong bài giảng của *A. V. Jayanthan*, *Regular local ring* (2005). Cấu trúc của luận văn gồm có 3 chương và được trình bày cụ thể như sau:

Chương 1 được dùng để trình bày khái niệm và một số kết quả về vành chính quy trong trường hợp địa phương. Trong đó tiết 1 được dành để chuẩn bị một số kiến thức về hệ sinh cực tiểu và số phần tử sinh cực tiểu của iđêan. Tiết 2 được dùng để trình bày định nghĩa, một số tính chất và ví dụ vành chính quy địa phương. Một trong những kết quả chính của chương được trình bày trong tiết này là Định lý 1.2.9 nói rằng mọi vành chính quy địa phương đều là miền nguyên. Tiết 3 được dành để trình bày về hệ tham số chính quy của vành địa phương chính quy. Kết quả chính của tiết 3 là đặc trưng tính chính quy của vành địa phương chính quy qua tính chất của vành phân bậc liên kết.

Tiếp theo trong chương 2, chúng tôi sẽ trình bày các tính chất đồng điều của vành địa phương chính quy. Để chuẩn bị cho chứng minh các kết quả chính của chương chúng tôi sẽ dành tiết 1 để nhắc lại định nghĩa, lấy ví dụ và chứng minh một số tính chất về chiều xạ ảnh của môđun. Trong tiết 2 chúng tôi trình bày các kết quả chính của chương này, trong đó chúng tôi chứng minh đặc trưng một vành địa phương là chính quy thông qua tính hữu hạn của chiều đồng điều của các môđun trên đó (Định lý Auslander - Buchsbaum - Serre). Một hệ quả quan trọng của định lý này là sự bảo toàn qua địa phương hoá của tính chính quy cũng được trình bày trong tiết này.

Cuối cùng chương 3 được dành để trình bày về vành chính quy trong trường hợp không địa phương. Trong tiết 1 của chương này chúng tôi nêu khái niệm và chứng minh một số tính chất của vành chính quy không địa phương. Kết quả chính của tiết 1 là mệnh đề 3.1.3 về sự tương đương giữa tính chính quy của một vành và vành đa thức trên đó . Trong khi đó tiết 2 được dùng để trình bày kết quả chính của chương. Dựa vào các kết quả đã có ở chương 1 và chương 2 chúng tôi sẽ chứng minh mọi vành chính quy đều là miền phân tích duy nhất (Định lý Auslander - Buchsbaum - Nagata).

Chương 1

Vành địa phương chính quy

Trong suốt luận văn này, một vành luôn là vành giao hoán, Noether, có đơn vị khác không.
Mục đích của Chương 1 là trình bày khái niệm và một số kết quả về vành chính quy trong trường hợp địa phương. Tiết 1 được dành để chuẩn bị một số kiến thức về hệ sinh cực tiểu và số phần tử sinh cực tiểu của iđêan. Các khái niệm và kết quả trong tiết này sẽ được dùng để định nghĩa và chứng minh các tính chất của vành địa phương chính quy trong các tiết sau. Trong tiết 2, chúng tôi trình bày định nghĩa, một số tính chất và ví dụ vành chính quy địa phương. Một trong các kết quả chính được chứng minh là mọi vành địa phương chính quy đều là miền nguyên. Tiết 3 được dành để trình bày về hệ tham số chính quy của vành chính quy địa phương.

1.1 Hệ sinh cực tiểu của iđêan

Ta luôn xét $(R, \mathfrak{m}, k)$ là một vành địa phương Noether với iđêan cực đại $\mathfrak{m}$ và trường thặng dư $k = R/\mathfrak{m}$.

Định nghĩa 1.1.1. *Một hệ sinh $x_1, x_2, \ldots, x_n$ của $\mathfrak{m}$ là tối tiểu nếu ta bỏ đi bất kỳ phần tử x_i nào thì phần còn lại $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ không là hệ sinh của $\mathfrak{m}$.*

Ví dụ 1.1.2. *Cho k là một trường, xét vành $k[[X_1, \ldots, X_n]]$. Ta biết $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ là vành địa phương Noether có iđêan cực đại $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n)$. Dễ thấy rằng hệ $X_1, \ldots, X_n$ là hệ sinh tối tiểu của $\mathfrak{m}$.*

Mệnh đề sau đây cho ta một điều kiện tương đương với định nghĩa hệ sinh tối tiểu.

Mệnh đề 1.1.3. *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{m}$. Khi đó hệ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là hệ sinh tối tiểu của $\mathfrak{m}$ khi và chỉ khi $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n \in R/\mathfrak{m}^2$ là cơ sở của k- không gian véctơ $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.*

Chứng minh. $(\Rightarrow)$ Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là hệ sinh tối tiểu của $\mathfrak{m}$. Suy ra $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ là hệ sinh của $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Thật vậy xét một phần tử $\overline{x} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Do $x \in \mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$ nên

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i, a_i \in R.$$

Suy ra

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \mathfrak{m}^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i + \mathfrak{m})(x_i + \mathfrak{m}^2) + \mathfrak{m}^2 = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i \overline{x}_i,$$

trong đó $\overline{a}_i = a_i + \mathfrak{m} \in R/\mathfrak{m}, \overline{x}_i = x_i + \mathfrak{m}^2 \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Vậy $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ là hệ sinh của $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Bây giờ ta giả sử $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ không độc lập tuyến và $\overline{x}_1 = \sum\limits_{i=2}^{n} \overline{a}_i \overline{x}_i, \overline{a}_i \in R/\mathfrak{m}$ suy ra

$$x_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i x_i \in \mathfrak{m}^2 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^2$$

$$\Leftrightarrow x_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i x_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, a_{ij} \in R$$

$$\Leftrightarrow x_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i x_i = a_{11}(x_1)^2 + \sum_{(i,j)\neq(1,1)}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$\Leftrightarrow x_1(1 - a_1 x_1) = \sum_{i=2}^{n} a_i x_i + \sum_{(i,j)\neq(1,1)}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{1 - a_1 x_1}(\sum_{i=2}^{n} a_i x_i + \sum_{(i,j)\neq(1,1)}^{n} a_{ij} x_i x_j) \in (x_2, \ldots, x_n)$$

(Vì $x_1 \in \mathfrak{m}$ nên $1 - a_1 x_1$ khả nghịch trong vành địa phương R). Điều này mâu thuẫn với giả thiết $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là hệ sinh tối tiểu của $\mathfrak{m}$. Do đó hệ $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ là độc lập tuyến tính. Vậy $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ là cơ sở của k - không gian véctơ $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

$(\Leftarrow)$ Ngược lại, giả sử $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ là cơ sở của $k-$không gian véctơ $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Ta có $\mathfrak{m} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)R + \mathfrak{m}^2$ nên

$$\mathfrak{m}/I = (\mathfrak{m}^2 + I)/I = \mathfrak{m}(\mathfrak{m}/I),$$

với $I = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Theo bổ đề Nakayama ta có $\mathfrak{m}/I = 0$ hay $\mathfrak{m} = I$. Vậy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là hệ sinh của $\mathfrak{m}$. Tiếp theo ta đi chứng minh hệ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là tối tiểu. Thật vậy giả sử ngược lại hệ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ không phải là hệ sinh tối tiểu của $\mathfrak{m}$, suy ra tồn tại hệ $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$ là một hệ sinh tối tiểu của $\mathfrak{m}$. Theo giả thiết suy ra $\overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_t}$ là cơ sở của k - không gian véctơ $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ điều này mâu thuẫn với giả thiết $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ là cơ sở của k-không gian véctơ $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Vậy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là hệ sinh tối tiểu của $\mathfrak{m}$. □

Định nghĩa 1.1.4. *Cho $(R, \mathfrak{m}, k)$ là một vành địa phương Noether. Số phần tử của một hệ sinh tối tiểu của $\mathfrak{m}$ được ký hiệu là $\mu(\mathfrak{m})$.*

Ví dụ 1.1.5. *Cho k là một trường, xét vành $k[[X_1, \ldots, X_n]]$. Ta biết $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ là vành địa phương Noether có iđêan cực đại $\mathfrak{m} =$*

$(X_1, \ldots, X_n)$ *và hệ* $X_1, \ldots, X_n$ *là một hệ sinh tối tiểu của* $\mathfrak{m}$. *Vậy ta có* $\mu(\mathfrak{m}) = n$.

Bổ đề 1.1.6. *Ta có*
(a) $\mu(\mathfrak{m}) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.
(b) $\mu(\mathfrak{m}) \geq \dim(R)$.

Chứng minh. (a) Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là hệ sinh tối tiểu của $\mathfrak{m}$ với $n = \mu(\mathfrak{m})$. Mặt khác theo Bổ đề 1.1.3 hệ $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ là cơ sở của k-không gian véctơ $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ nên ta có $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = n$.
Vậy ta có $\mu(\mathfrak{m}) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.
(b) Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là hệ sinh tối tiểu của $\mathfrak{m}$. Vì

$$\dim(R/(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \dim(R/\mathfrak{m}) = 0,$$

nên tồn tại x_i sao cho $\dim(R/x_iR) < \dim R$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $\dim R$
+ Với $\dim R = 0, 1$ là hiển nhiên.
+ Giả sử $\dim R > 1$. Theo định lý giao Krull ta có $\dim(R/x_1R) = \dim R - 1$. Mặt khác vì $\overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ là hệ sinh tối tiểu của $\overline{\mathfrak{m}}$ (với $\overline{\mathfrak{m}}$ là iđêan của R/x_1R). Bằng quy nạp cho R/x_1R ta được

$$\mu(\overline{\mathfrak{m}}) \geq \dim(R/x_1R) \Leftrightarrow \mu(\mathfrak{m}) - 1 \geq \dim R - 1.$$

Vậy ta có $\mu(\mathfrak{m}) \geq \dim(R)$. □

Tính chất sau đây của hệ sinh tối tiểu được dùng nhiều lần trong luận văn này.

Mệnh đề 1.1.7. *Cho* $I \subseteq \mathfrak{m}$ *là một iđêan của* R. *Nếu* $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathfrak{m}$ *có ảnh* $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_r$ *là hệ sinh tối tiểu của* $\mathfrak{m}/I$ *thì tồn tại* $x_{r+1}, \ldots, x_n \in I$ *với* $r \leq n$ *sao cho hệ* $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$ *là hệ sinh tối tiểu của* $\mathfrak{m}$.