ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN TÀI GIÁP

PHƯƠNG PHÁP LẶP LOẠI MANN - HALPERN CHO ÁNH XẠ VÀ NỬA NHÓM KHÔNG GIÃN

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã ngành: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được trình bày dưới sự hướng dẫn tận tình và sự chỉ đạo nghiêm khắc của thầy giáo **GS.TS. Nguyễn Bường**. Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất đến thầy.

Tôi cũng xin kính gửi lời cảm ơn chân thành đến các thầy giáo, cô giáo tham gia giảng dạy khóa học cao học 2011 – 2013, những người đã đem tâm huyết và sự nhiệt tình để giảng dạy và trang bị cho tôi nhiều kiến thức cơ sở.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, phòng Đào tạo, khoa Toán – Tin trường ĐHKH, Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K5A đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Tuy bản thân có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, ngày 06 tháng 05 năm 2013

Tác giả

Nguyễn Tài Giáp

LỜI NÓI ĐẦU

Rất nhiều bài toán nảy sinh trong các lĩnh vực khác nhau của toán học như tối ưu, giải tích biến phân và phương trình đạo hàm riêng có thể mô tả dưới dạng phương trình

$$x = Tx,$$

trong đó T là một toán tử phi tuyến xác định trên một không gian metric X. Nghiệm của phương trình này được gọi là điểm bất động của ánh xạ T. Nếu T là ánh xạ co trên không gian metric đầy đủ X, khi đó Nguyên lý ánh xạ co Banach đảm bảo rằng ánh xạ T có duy nhất điểm bất động và dãy lặp Picard $\{T^n x\}$ hội tụ mạnh về điểm bất động của ánh xạ T. Tuy nhiên nếu T là ánh xạ không giãn, tức là

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

thì ta phải thêm một số giả thiết đặt lên ánh xạ T trong một số không gian nhất định để đảm bảo cho sự tồn tại của điểm bất động của ánh xạ T. Từ những năm 60, những nghiên cứu về bài toán điểm bất động của lớp các ánh xạ không giãn đã trở thành một trong những hướng nghiên cứu chính hết sức sôi động của giải tích phi tuyến do mối liên hệ với các tính chất hình học của không gian Banach cùng với các tính chất tương ứng của các loại ánh xạ không giãn với các lý thuyết về toán tử đơn điệu và toán tử J-đơn điệu.

Mối liên hệ giữa lý thuyết toán tử đơn điệu và lý thuyết về ánh xạ không giãn chủ yếu dựa trên hai tính chất: (1) nếu T là ánh xạ không giãn thì ánh xạ bù $I - T$ là đơn điệu và (2) toán tử giải của toán tử đơn điệu A là không giãn. Hơn nữa trong cả hai trường hợp tập điểm bất động của ánh xạ không giãn trùng với tập các không gian điểm của toán tử đơn điệu.

Một hướng nghiên cứu rất quan trọng của bài toán điểm bất động là xây dựng các phương pháp lặp cho bài toán. Tuy nhiên, khi T là ánh xạ không giãn, ngay cả khi T có điểm bất động, thì dãy lặp Picard $\{T^n x\}$ không hội tụ trong trường hợp tổng quát. Chính vì lý do này, trong những thập niên gần đây, các phương pháp xấp xỉ tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert hoặc không gian Banach đã và đang nhận được sự quan tâm đặc biệt. Những phương pháp lặp nổi tiếng cần phải kể đến là phương pháp lặp Mann và phương pháp lặp Halpern. Thuật toán lặp Mann được đề xuất năm 1953 với dãy lặp được xác định như sau

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n, \tag{0.1}$$

ở đây x_0 là điểm bất kì trên C, $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset (0, 1)$. Ông đã chứng minh sự hội tụ yếu của dãy lặp (0.1) tới điểm bất động của ánh xạ T, với T là ánh xạ không giãn từ tập con lồi đóng C trong không gian Hilbert vào chính nó với điều kiện dãy tham số $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ thỏa mãn điều kiện $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) = \infty$. Năm 1967, Brower và Petryshyn là những người đầu tiên vận dụng thuật toán lặp Mann để có được sự hội tụ mạnh của dãy lặp $\{x_n\}$ tới điểm bất động của toán tử giả co chặt trong không gian Hilbert.

Thuật toán lặp Halpern được đề xuất vào năm 1967 với dãy lặp $\{x_n\}$ được xác định như sau:

$$x_{n+1} = \beta_n u + (1 - \beta_n) T x_n, \quad n \geq 0,$$

ở đây u, x_0 là 2 điểm cố định trên C và dãy $\{\beta_n\} \subset (0, 1)$ với điều kiện $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$ và $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty$. Tác giả đã chứng minh được sự hội tụ mạnh của phương pháp đến điểm bất động của ánh xạ không giãn T trên tập con lồi đóng bị chặn C trong không gian Hilbert.

Đã có rất nhiều các kết quả công bố về các phương pháp lặp cho bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn dựa trên ý tưởng về các phương pháp lặp Mann và Halpern. Trong luận văn này, chúng tôi trình bày lại phương pháp lặp loại Mann-Halpern cho bài toán điểm bất động của ánh xạ không giãn và nửa nhóm không giãn trong không gian Hilbert dựa trên bài báo của GS.TS. Nguyễn Bường năm 2011.

Nội dung của luận văn bao gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và danh sách tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày các khái niệm cơ bản và các vấn đề liên quan đến luận văn.

Chương 2: Trình bày phương pháp lặp loại Mann-Halpern cho ánh xạ và nửa nhóm không giãn. Sự hội tụ mạnh đến điểm bất động của ánh xạ không giãn và phương pháp xấp xỉ tìm điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn.

MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

$\mathbb{H}$	không gian Hilbert thực
$\mathbb{R}^n$	tập hợp số thực
$x \in D$	x thuộc tập D
$x \notin D$	x không thuộc tập D
$\forall x$	với mọi x
$\exists x$	tồn tại x
$\varnothing$	tập hợp rỗng
$\cap$	phép giao các tập hợp
$\cup$	phép hợp các tập hợp
$x := y$	x được định nghĩa bằng y
X^*	không gian liên hợp của X
$\operatorname{int} X$	phần trong của tập X
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của x và y

Chương 1: MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Chương này trình bày một số định nghĩa, các tính chất về giải tích hàm và hai phương pháp lặp cổ điển là phương pháp lặp Mann - Halpern cho ánh xạ và nửa nhóm không giãn.

1.1 Không gian Hilbert, không gian định chuẩn và không gian Banach

Định nghĩa 1.1: Cho X là một không gian tuyến tính trên R. Một tích vô hướng trong X là một ánh xạ $\langle .,. \rangle : X \times X \to R$ thoả mãn các điều kiện sau:

i) $\langle x, x \rangle > 0, \forall x \neq 0; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in X;$

iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall x, y \in X, \alpha \in R;$

iv) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in X.$

Không gian tuyến tính X cùng tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ được gọi là không gian tiền Hilbert. Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.

Định nghĩa 1.2: Không gian định chuẩn thực là một không gian tuyến tính thực X trong đó ứng với mỗi phần tử $x \in X$ ta có một số $\| x \|$ gọi là chuẩn của x, thoả mãn các điều kiện:

1. $\| x \| > 0$, $\forall x \neq 0$, $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\| \alpha x \| = \| \alpha \| . \| x \|, \forall x \in X, \alpha \in R;$
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \forall x, y \in X.$

Một không gian định chuẩn đầy đủ là không gian Banach.

Định nghĩa 1.3: Một dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương trong X là một ánh xạ $\phi : X \times X \to K$ thỏa mãn các điều kiện:

$a)\phi(x+y,z)=\phi(x,z)+\phi(y,z)\ (\forall x,y,z\in X)$;
$b)\phi(\lambda x,y)=\lambda\phi(x,y)\quad(\forall x,y\in X,\forall\lambda\in K)$;
$c)\phi(y,x)=\overline{\phi(x,y)}\quad(\forall x,y\in X)$;
trong đó $\overline{\phi(x,y)}$ là số phức liên hợp của số $\phi(x,y)$

d) $\phi(x,x)=(x,y)$

Khi đó ta ký hiệu $\phi(x,x)=(x,y)$.

Điều sau đây là hiển nhiên.

Định lý 1.1: *Nếu $x\to\|x\|$ là một chuẩn trên E thì $d(x,y)=\|x-y\|$ là một mêtric trên E, mêtric này thỏa mãn d(x+z,y+z) = d(x,y) và $d(\lambda x,\lambda y)=\lambda d(x,y)$ với mọi $x,y,z\in E,\lambda\in K$. Một không gian định chuẩn là một không gian vectơ cùng với một chuẩn trên nó. Không gian định chuẩn là không gian mêtric với mêtric sinh bởi chuẩn.*

Định lý 1.2: *Chuẩn $x\to\|x\|$ là hàm liên tục đều từ E vào R.*

Chứng minh

Theo Định nghĩa 1.2 $|\|x\|-\|y\||\le\|x-y\|$ và $\|y\|\le\|x-y\|+\|x\|$

từ đó $|\|x\|-\|y\||\le\|x-y\|$. Vậy chuẩn là hàm liên tục đều.

Định lý 1.3: *Giả sử E là một không gian định chuẩn. Khi đó ánh xạ $(x,y)\to x+y$ từ $E\times E$ vào E và $(\lambda,x)\to\lambda x$ từ $K\times E$ vào E là liên tục.*

Chứng minh: Giả sử (x,y) và $(x_0,y_0)\in E\times E$ Ta có :

$\|(x+y)-(x_0+y_0)\|=\|(x-x_0)+(y+y_0)\|\le\|(x-x_0\|+\|(y+y_0)\|$

Điều này cho ta tính liên tục của ánh xạ $(\lambda,x)\to\lambda x$ tại điểm (λ_0,x_0).

Định lý 1.4: *Giả sử E là không gian định chuẩn. Khi đó với mọi $a\in E$ ánh xạ $x\to a+x$ là phép đồng phôi đẳng cự (tức là bảo tồn khoảng cách) từ E lên E và với mọi $\lambda\in K,\lambda\neq0$ ánh xạ $x\to\lambda x$ là* *phép đồng phôi đều E lên E.*

Chứng minh: Dễ thấy các ánh xạ này là những song ánh. Kết luận về tính liên tục hai chiều được suy ra từ các đẳng thức :

$$\|(a+x)-(a+y)\| = \|x-y\|\,,$$
$$\|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda|\,\|x-y\|\,.$$

Hệ quả 1.1: Giả sử E là không gian định chuẩn. Khi đó các điều kiện sau đây là tương đương

a.U là lân cận của điểm $0 \in E$,

b.αU là lân cận của 0 với mọi $\alpha \neq 0$,

c.a + U là lân cận của a với mọi $a \in E$.

Không gian Banach là không gian định chuẩn đầy đủ (với mêtric sinh bởi chuẩn).

Ví dụ 1.1: Không gian định chuẩn, không gian Banach

a) Xét không gian vectơ K^n. Với mỗi $x = (x_1, ...x_n)$ đặt:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2},$$
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,,$$
$$\|x\|_2 = \sup_{1 \le i \le n} |x_i|\,.$$

Ta nhận được ba chuẩn khác nhau trên K^n. Các chuẩn này tương đương với nhau (tức là cùng sinh ra một tôpô trên K^n). K^n với chuẩn đầu tiên gọi là không gian Euclide.

b) Kí hiệu $C\,[a,b]$ là không gian vectơ các hàm liên tục từ đoạn $[a,b] \subset R$ vào K (đây là K – không gian vectơ với phép toán hàm). $C\,[a,b]$ là không gian định chuẩn với chuẩn $\|f\|_2 = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|\,.$

Dãy $f_n \to g$ trong $C\,[a,b]$ có nghĩa là $\|f_n - g\| \to 0$ hay $\sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = C_n \to 0$. Theo giải tích cổ điển điều này có nghĩa