ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ HOÀ

BÀI TOÁN DIRICHLET ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH MONGE-AMPERE PHỨC VÀ TÍNH CHÍNH QUI CỦA HÀM GREEN ĐA PHỨC

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH

Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. PHẠM HIẾN BẰNG

THÁI NGUYÊN - 2013

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu tham khảo trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2013

Tác giả

Nguyễn Thị Hòa

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn Thầy về sự hướng dẫn tận tình, hiệu quả với những kinh nghiệm trong quá trình nghiên cứu để hoàn thành luận văn.

Xin cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Sở Giáo dục và Đào tạo Tuyên Quang, Trường PTDT Nội trú - THPT tỉnh, Trường THPT Chuyên Tuyên Quang cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2013

Tác giả

Nguyễn Thị Hòa

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Cho Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với biên $\partial\Omega$ lớp $\mathbb{C}^\infty$. Xét bài toán Dirichlet đối với các phương trình Monge-Ampère phức

$$\begin{cases} \det(u_{z_j\bar{z}_k}) = \psi(z,u,\nabla u) & trong\ \Omega \\ u = \varphi & trên\ \ \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

Khi Ω là một miền giả lồi mạnh, bài toán này đã được nghiên cứu rộng rãi. Năm 1976, E. Bedford và B. A. Taylor đã chứng minh sự tồn tại, tính duy nhất và tính chính qui Lipschitz đều toàn cục của các nghiệm đa điều hòa dưới tổng quát. Năm 1980, Cheng và Yau, trong công trình nghiên cứu về các mêtric Kähler-Einstein đầy đủ trên các đa tạp phức không Compact, đã giải bài toán (*) với $\psi = e^u$ và $\varphi = +\infty$, thu được nghiệm thuộc lớp $C^\infty(\Omega)$. Năm 1985, L. Caffarelli, J. J. Kohn, L. Nirenberg và J. Spruck đã chứng minh sự tồn tại của các nghiệm đa điều hòa dưới cổ điển của (*) cho trường hợp $\psi > 0$, không suy biến trong các điều kiện ψ thích hợp. Trường hợp suy biến $\psi \geq 0$ cũng đã thu hút nhiều sự chú ý, và các phản ví dụ được tìm thấy đã chỉ ra rằng nghiệm đó không nhất thiết phải là nghiệm thuộc lớp C^2 (xem Bedford và Fornaess, 1979; Gamelin và Sibony năm 1980). Ở đây chúng ta xem xét bài toán Dirichlet (*) đối với các miền tổng quát mà không cần đến tính giả lồi.

Theo hướng dẫn nghiên cứu trên, chúng tôi chọn đề tài: "*Bài toán Dirichlet đối với phương trình Monge-Ampere phức và tính chính qui của hàm Green đa phức*".

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Mục đích chính của luận văn là trình bày một số kết quả trong việc nghiên cứu tính chính quy của nghiệm tổng quát của phương trình Monge-Ampère.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

- Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, toán tử Monge-Ampère và bài toán Dirichlet cổ điển đối với toán tử Monge-Ampere, Hàm Green đa phức với cực logarit tại một điểm .

- Trình bày một số kết quả của Bo Guan về tính chính quy của nghiệm tổng quát của phương trình Monge-Ampère và tính chính qui của hàm Green đa phức.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phương pháp của giải tích phức kết hợp với các phương pháp của lý thuyết thế vị phức để trình bày các kết quả của Bo Guan.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 43 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, hàm đa điều hoà dưới cực đại, toán tử Monge-Ampère và bài toán Dirichlet cổ điển đối với toán tử Monge-Ampere, Hàm Green đa phức với cực logarit tại một điểm.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày các kết quả nghiên cứu về tính chính quy của nghiệm tổng quát của phương trình Monge-Ampère và tính chính qui của hàm Green đa phức.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1
CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Hàm đa điều hoà dưới cực đại

1.1.1. Định nghĩa. *Cho* Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$ *và* $u:\Omega\to[-\infty,\infty)$ *là một hàm nửa liên tục trên và không trùng với* $-\infty$ *trên bất kỳ thành phần liên thông nào của* Ω. *Hàm* u *được gọi là đa điều hoà dưới nếu với mỗi* $a\in\Omega$ *và* $b\in\mathbb{C}^n$, *hàm* $\lambda\mapsto u(a+\lambda b)$ *là điều hoà dưới hoặc trùng* $-\infty$ *trên mỗi thành phần của tập hợp* $\{\lambda\in\mathbb{C}: a+\lambda b\in\Omega\}$. *Trong trường hợp này, ta viết* $u\in PSH(\Omega)$. (*ở đây* $PSH(\Omega)$ *là lớp các hàm đa điều hoà dưới trong* Ω).

1.1.2. Định nghĩa. *Hàm giá trị thực* $u\in C^2(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, *gọi là đa điều hòa dưới chặt nếu ma trận Hessian phức* $\left\{u_{z_j\bar{z}_k}\right\}$ *là xác định dương trong* Ω.

Ký hiệu $\left\{u^{j\bar{k}}\right\}$ là ma trận nghịch đảo của $\left\{u_{z_j\bar{z}_k}\right\}$ khi nó là khả nghịch.

1.1.3. Định nghĩa. *Cho* Ω *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$ *và* $u:\Omega\to\mathbb{R}$ *là hàm đa điều hoà dưới. Ta nói rằng* u *là cực đại nếu với mỗi tập con mở compact tương đối* G *của* Ω, *và với mỗi hàm nửa liên tục trên* v *trên* $\overline{G}$ *sao cho* $v\in PSH(G)$ *và* $v\le u$ *trên* ∂G, *đều có* $v\le u$ *trong* G.

Sau đây ta sẽ xem xét một số tính chất tương đương của tính cực đại.

1.1.4. Mệnh đề. *Cho* $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ *là mở và* $u:\Omega\to\mathbb{R}$ *là hàm đa điều hoà dưới. Khi đó các điều kiện sau là tương đương*:

(i) *Với mỗi tập con mở compact tương đối* G *của* Ω *và mỗi* $v\in PSH(\Omega)$, *nếu* $\liminf_{z\to x}(u(z)-v(z))\ge 0$, *với mọi* $x\in\partial G$, *thì* $u\ge v$ *trong* G;

(ii) *Nếu* $v\in PSH(\Omega)$ *và với mỗi* $\varepsilon>0$ *tồn tại một tập compact* $K\subset\Omega$ *sao cho* $u-v\ge-\varepsilon$ *trong* $\Omega\setminus K$, *thì* $u\ge v$ *trong* Ω;

(iii) *Nếu* $v \in PSH(\Omega)$, *G là một tập con mở compact tương đối của* Ω, *và* $u \geq v$ *trên* ∂G *thì* $u \geq v$ *trong* G;

(iv) *Nếu* $v \in PSH(\Omega)$, *G là một tập con mở compact tương đối của* Ω, *và* $\liminf_{z \to \xi}(u(z) - v(z)) \geq 0$, *với mỗi* $\xi \in \partial G$, *thì* $u \geq v$ *trong* G;

(v) *u là hàm cực đại.*

Chứng minh. $(i) \Rightarrow (ii)$: Cho v là một hàm đa điều hoà dưới có tính chất: với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một tập compact $K \subset \Omega$ sao cho $u - v \geq -\varepsilon$ trong $\Omega \setminus K$. Giả sử rằng $u(a) - v(a) = \eta < 0$ tại một điểm $a \in \Omega$. Bao đóng của tập hợp

$$E = \left\{ z \in \Omega : u(z) < v(z) + \frac{\eta}{2} \right\}$$

là tập con compact của Ω. Bởi vậy có thể tìm được tập mở G chứa E và compact tương đối trong G. Theo (i) ta có $u \geq v + \dfrac{\eta}{2}$ trong G, điều đó mâu thuẫn với $a \in E$. Phần còn lại được suy ra từ khẳng định: hàm

$$w(z) = \begin{cases} \max\{u(z), v(z)\} & (z \in G) \\ u(z) & (z \in \Omega \setminus G) \end{cases}$$

là đa điều hoà dưới trong Ω theo các giả thiết (iii), (iv), (v) và (i).

1.2. Toán tử Monge-Ampère phức

Cho u là đa điều hoà dưới trên miền $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Nếu $u \in C^2(\Omega)$ thì toán tử:

$$(dd^c u)^n := \underbrace{(dd^c u) \wedge \ldots \wedge (dd^c u)}_{n} = 4^n n! \det\left[\frac{\partial u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}\right]_{1 \leq j,k \leq n} dV,$$

với dV là yếu có thể tích trong $\mathbb{C}^n$ gọi là toán tử Monge-Ampère. Toán tử này có thể xem như độ đo Radon trên Ω, tức là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên không gian các hàm liên tục với giá compact $C_0(\Omega)$ trên Ω

$$C_0(\Omega) \ni \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi \, (dd^c u)^n .$$

Bedford và Taylor đã chứng minh rằng nếu u là đa điều hoà dưới bị chặn địa phương trên Ω thì tồn tại dãy $\{u_n\}_{n>1} \subset PSH(\Omega) \cap C^{\infty}$ sao cho $u_n \downarrow u$ và $\left\{(dd^c u_n)^n\right\}$ hội tụ yếu tới độ đo Radon μ trên Ω tức là:

$$\lim_{n} \int_{\Omega} \varphi\, (dd^c u_n)^n = \int_{\Omega} \varphi\, d\mu, \ \forall \varphi \in C_0(\Omega).$$

Hơn nữa μ không phụ thuộc vào việc chọn dãy $\{u_n\}$ như trên, ta ký hiệu:

$$(dd^c u)^n = \mu$$

và gọi là *toán tử Monge-Ampère* của u.

Sau đây chúng ta sẽ xem xét một vài tính chất cơ bản của toán tử Monge-Ampère được trình bày trong [1].

1.2.1. Mệnh đề. *Giả sử $\{\mu_j\}$ là dãy các độ đo Radon trên tập mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ hội tụ yếu tới độ đo Radon μ. Khi đó*

a) Nếu $G \subset \Omega$ là tập mở thì $\mu(G) \le \liminf\limits_{j\to\infty} \mu_j(G)$.

b) Nếu $K \subset \Omega$ là tập compact thì $\mu(K) \ge \limsup\limits_{j\to\infty} \mu_j(K)$.

c) Nếu E compact tương đối trong Ω sao cho $\mu(\partial E) = 0$ thì

$$\mu(E) = \lim_{j\to\infty} \mu_j(E).$$

Chứng minh.

a) Ta có $\mu(G) = \sup\{\mu(K) : K \Subset G\}$. Giả sử $K \Subset G$ là tập compact. Lấy $\varphi \in C_0(G)$, $0 \le \varphi \le 1$ và $\varphi = 1$ trên K. Khi đó

$$\mu(K) \le \mu(\varphi) = \lim_{j\to\infty} \mu_j(\varphi) \le \liminf_{j\to\infty} \mu_j(G).$$

Từ đó $$\mu(G) \le \liminf_{j\to\infty} \mu_j(G).$$

b) Ta có $\mu(K) = \inf\left\{\mu(V) : V \supset K, V \subset \Omega, V = V^0\right\}$. Giả sử V là một lân cận mở của K và $\varphi \in C_0(V)$, $0 \le \varphi \le 1$ và $\varphi = 1$ trên K. Khi đó

$$\mu(V) \ge \mu(\varphi) = \lim_{j\to\infty} \mu_j(\varphi) \ge \lim_{j\to\infty} \sup \mu_j(K).$$

Từ đó $\mu(K) \ge \lim\limits_{j\to\infty} \sup \mu_j(K)$.

c) Viết $\bar{E} = IntE \cup \partial E$. Khi đó

$$\mu(E) = \mu(\operatorname{int} E) \le \lim_{j\to\infty} \inf \mu_j(\operatorname{int} E) \le \lim_{j\to\infty} \inf \mu_j(E).$$

Mặt khác

$$\mu(\bar{E}) \ge \lim_{j\to\infty} \sup \mu_j(\bar{E}) \ge \lim_{j\to\infty} \sup \mu_j(E).$$

Từ đó $\mu(E) \ge \lim\limits_{j\to\infty} \sup \mu_j(E)$.

Vậy $\mu(E) = \lim\limits_{j\to\infty} \mu_j(E)$.

1.2.2. Định lý. *Giả sử* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *là miền bị chặn và* $u, v \in PSH(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *sao cho* $\lim\limits_{z\to\partial\Omega} \inf(u(z) - v(z)) \ge 0$. *Khi đó*

$$\int_{\{u<v\}} (dd^c v)^n \le \int_{\{u<v\}} (dd^c u)^n. \qquad (1.1)$$

1.2.3. Hệ quả. *Giả sử* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *là miền bị chặn và* $u, v \in PSH(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *sao cho* $u \le v$ *và* $\lim\limits_{z\to\partial\Omega} u(z) = \lim\limits_{z\to\partial\Omega} v(z) = 0$. *Khi đó*

$$\int_{(\Omega)} (dd^c v)^n \le \int_{(\Omega)} (dd^c u)^n.$$

1.2.4. Hệ quả. (Nguyên lý so sánh). *Giả sử* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *là miền bị chặn và* $u, v \in PSH(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *sao cho* $\lim\limits_{z\to\partial\Omega} \inf(u(z) - v(z)) \ge 0$. *Giả sử* $(dd^c u)^n \le (dd^c v)^n$ *trên* Ω. *Khi đó* $v \le u$ *trên* Ω.