ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HUẾ

PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH TÌM NGHIỆM CHUNG CHO MỘT HỌ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ TUYẾN TÍNH GIỚI NỘI

Chuyên Ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã ngành: 60460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn : GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

MỞ ĐẦU

Xét một bài toán ở dạng phương trình toán tử

$$Ax = f, \tag{1.1}$$

ở đây $A : X \to Y$ là một toán tử từ không gian Banach X vào không gian Banach Y và f là phần tử thuộc Y.

Giả sử A^{-1} không liên tục và thay cho f ta chỉ biết f_δ là xấp xỉ của f thỏa mãn

$$\|f_\delta - f\| \leq \delta.$$

Bài toán đặt ra là dựa vào thông tin về (A, f_δ) và sai số δ, tìm một phần tử xấp xỉ nghiệm đúng x_0. Rõ ràng không thể xây dựng phần tử xấp xỉ x^δ theo quy tắc $x^\delta = A^{-1}f_\delta$ do A^{-1} có thể không xác định hoặc A^{-1} tồn tại nhưng không liên tục, nên $A^{-1}f_\delta$ không cho ta xấp xỉ nghiệm đúng x_0.

Tham số δ chỉ cho ta mức độ sai số của vế phải của phương trình (1.1). Vì vậy một điều nảy sinh là liệu có thể xây dựng một phần tử xấp xỉ phụ thuộc vào một tham số nào đó và tham số này được chọn tương thích với δ sao cho khi $\delta \to 0$ thì phần tử xấp xỉ này hội tụ đến nghiệm đúng x_0. Ta cũng có thể thấy rằng nếu được thì từ $f_0 \in Y$ ta có phần tử xấp xỉ tương ứng thuộc X. Tức là tồn tại một toán tử nào đó tác động từ không gian Y vào không gian X.

Năm 2011 GS. TS. Nguyễn Bường và nghiên cứu sinh Nguyễn Đình Dũng đã đưa ra phương pháp chung để giải quyết một hệ phương trình toán tử tuyến tính giới nội.

Mục đích của luận văn này là trình bày phương pháp hiệu chỉnh tìm nghiệm chung cho một hệ phương trình toán tử tuyến tính giới nội và đưa ra một số ví dụ minh họa cho phương pháp hiệu chỉnh đã trình bày.

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, luận văn gồm 2 chương.

Chương 1. Giới thiệu về phương pháp hiệu chỉnh và một số khái niệm liên quan

Chương 2. Trình bày phương pháp hiệu chỉnh tìm nghiệm chung cho một họ phương trình toán tử tuyến tính giới nội

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của GS.TS. Nguyễn Bường - Viện Công nghệ Thông tin, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Từ đáy lòng mình, em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo hướng dẫn của thầy.

Em xin trân trọng cảm ơn tới các Thầy Cô trong trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, phòng đào tạo trường Đại học Khoa học. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K5 - Trường Đại học Khoa học đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tôi xin cảm ơn tới sở giáo dục - đào tạo tỉnh Bắc Ninh, ban Giám hiệu, các đồng nghiệp trường THPT Tiên Du số 1 - Tiên Du - Bắc Ninh đã tạo điều kiện cho tôi học tập và hoàn thành kế hoạch học tập.

Tuy nhiên do sự hiểu biết của bản thân và khuôn khổ của luận văn thạc sĩ, nên chắc rằng trong quá trình nghiên cứu không tránh khỏi những thiếu sót, tôi rất mong được sự chỉ dạy và đóng góp ý kiến của các Thầy Cô và độc giả quan tâm tới luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 4 năm 2013

Tác giả

Nguyễn Thị Huế

Chương 1
Giới thiệu về phương pháp hiệu chỉnh và một số khái niệm liên quan

Các kiến thức trong chương này có tham khảo tài liệu [1].

1.1. Một số kiến thức cơ bản của giải tích hàm

1.1.1. Một số khái niệm về các không gian

Định nghĩa 1.1. Không gian định chuẩn thực là một không gian tuyến tính thực X trong đó ứng với mỗi phần tử $x \in X$ ta có một số $\| x \|$ gọi là chuẩn của x, thoả mãn các điều kiện:

1. $\| x \| > 0, \forall x \neq 0, \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\| \alpha x \| = |\alpha| \,.\, \| x \|, \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Một không gian định chuẩn đầy đủ là không gian Banach.

Định nghĩa 1.2. Dãy các phần tử x_n trong không gian Banach X được gọi là hội tụ đến phần tử $x_0 \in X$ khi $n \to \infty$, nếu $\|x_n - x_0\| \to 0$ khi $n \to \infty$, và được ký hiệu là $x_n \to x_0$. Sự hội tụ theo chuẩn được gọi là hội tụ mạnh.

Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là hội tụ yếu đến $x_0 \in X$, kí hiệu là $x_n \rightharpoonup x_0$, nếu với $\forall f \in X^*$- không gian liên hợp của X, ta có $f(x_n) \to f(x_0)$, khi $n \to \infty$.

Ví dụ 1.1. Không gian $L^p[a, b]$ với $1 < p < \infty$ là một không gian Banach với chuẩn

$$\|\varphi\| = \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p d(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ví dụ 1.2. Không gian $L^p[a, b], p > 1$ là không gian phản xạ. Mọi không gian định chuẩn hữu hạn chiều đều là phản xạ.

Định nghĩa 1.4. Cho X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Một tích vô hướng trong X là một ánh xạ $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện sau:

i) $\langle x, x\rangle > 0, \forall x \neq 0; \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \forall x, y \in X;$

iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle, \forall x, y \in X, \alpha \in \mathbb{R};$

iv) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle, \forall x, y, z \in X.$

Không gian tuyến tính X cùng tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ được gọi là không gian tiền Hilbert. Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.

Ví dụ 1.3. Các không gian $\mathbb{R}^n, L^2[a, b]$ là các không gian Hilbert với tích vô hướng được xác định tương ứng là:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i, x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) \in \mathbb{R},$$

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx, \varphi, \psi \in L^2[a, b].$$

Định nghĩa 1.5. Không gian Banach X được gọi là lồi chặt nếu mặt cầu đơn vị $S = S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ của X là lồi chặt, tức là từ $x, y \in S : \|x\| = 1, \|y\| = 1$ kéo theo $\|x + y\| < 2$.

Ví dụ 1.4. Không gian $L^p[a, b]$ là không gian lồi chặt.

Định nghĩa 1.6. Không gian Banach X được gọi là không gian Ephimov Stechkin (hay không gian có tính chất E-S) nếu X phản xạ và trong X sự hội tụ yếu các phần tử $x_n \rightharpoonup x$ và sự hội tụ chuẩn ($\|x_n\| \to \|x\|$) luôn kéo theo sự hội tụ mạnh ($\|x_n - x\| \to 0$).

Ví dụ 1.5. Không gian Hilbert có tính chất E-S.

1.1.2. Toán tử tuyến tính

Định nghĩa 1.7. Cho $A : X \to Y$ là một toán tử đơn trị và X và Y là hai không gian Banach. Chúng ta kí hiệu miền xác định của A là $D(A)$

với

$$D(A) = domA = \{x \in X/Ax \neq \emptyset\}$$

và miền giá trị là

$$R(A) = \{f \in Y/f \in Ax, x \in D(A)\}.$$

Toán tử A gọi là toán tử tuyến tính nếu

1)$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ với mọi $x_{1,}x_2 \in X$;

2)$A(\alpha x) = \alpha Ax$ với mọi $x \in X, \alpha \in \mathbb{R}$.

Nếu $Y \equiv \mathbb{R}$ thì ta có phiếm hàm tuyến tính f với miền xác định của hàm f là

$$domf = \{x \in X/f(x) \neq \emptyset\}.$$

Định nghĩa 1.8. Toán tử A được gọi là toán tử tuyến tính liên tục nếu nó là toán tử tuyến tính, đồng thời là toán tử liên tục giữa hai không gian X và Y.

Ví dụ 1.6. Cho $X = \mathbb{R}^k, Y = \mathbb{R}^m$, toán tử A được xác định bởi

$$A(x_1, x_2, ..., x_k) = (y_1, y_2, ..., y_m)$$

với

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} a_{\mathrm{ij}} x_j, i = 1, ..., m,$$

trong đó a_{ij} là các hằng số. Ma trận $(a_{\mathrm{ij}})_{k\times m}$ gọi là ma trận của toán tử tuyến tính A và đó là dạng tổng quát của mọi toán tử tuyến tính từ $\mathbb{R}^k$ vào $\mathbb{R}^m$. Một toán tử tuyến tính từ $\mathbb{R}^k$ vào $\mathbb{R}^m$ bao giờ cũng liên tục.

Định nghĩa 1.9. Toán tử A được gọi là

1) h-liên tục (hemicontinuous) trên X nếu $A(x+ty) \rightharpoonup Ax$ khi $t \to 0$ với mọi $x, y \in X$;

2) d-liên tục (demicontinuous) trên X nếu từ $x_n \to x$ suy ra $Ax_n \rightharpoonup Ax$ khi $n \to \infty$.

Định nghĩa 1.10. Toán tử tuyến tính $A : X \to Y$ được gọi là bị chặn (giới nội) nếu tồn tại số $K > 0$ thỏa mãn:

$$\|Ax\|_Y \leq K\|x\|_X, \forall x \in X.$$

Ví dụ 1.7. Cho $A : L^2[a, b] \to L^2[a, b]$ là một toán tử xác định bởi

$$(A\varphi)(x) = \int\limits_a^b K(x, s)\varphi(s)ds,$$

trong đó $K(x, s)$ là một hàm hai biến có bình phương khả tích, nghĩa là

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b K^2(x, s)dxds = N^2 < \infty.$$

Khi đó, A là một toán tử tuyến tính liên tục. Toán tử này gọi là toán tử tích phân Fredholm sinh bởi hạch $K(x, s)$.

Định nghĩa 1.11. Cho $A : X \to Y$ là một toán tử tuyến tính liên tục. Khi đó số

$$\inf \{K, K > 0 : \|Ax\| \leq K.\|x\|, \forall x \in X\}$$

được gọi là chuẩn của toán tử A, kí hiệu là $\|A\|$.

Nhận xét 1.1.

1) Ba chuẩn thường dùng trong $\mathbb{R}^n$ là

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

ở đây $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

2) Trong không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$, khi có một cơ sở cố định, toán tử tuyến tính A được cho bởi ma trận $(a_{\mathrm{ij}})_{i,j=1}^n$ thì ba chuẩn tương ứng

của ma trận A là:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{\mathrm{ij}}|$$

$$\|A\|_2 = \{\max_{1\le i\le n} \lambda_i \left(A^T A\right)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{\mathrm{ij}}|\,,$$

trong đó $\lambda_i\left(A^T A\right)$ là các giá trị riêng của ma trận đối xứng $\left(A^T A\right)$.

Định nghĩa 1.12. Toán tử A được gọi là toán tử bức (coercive) nếu

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|} = +\infty, \forall x \in X$$

Định nghĩa 1.13. Cho X là không gian Banach thực, $A : D(A) \to X^*$ là một toán tử với miền xác định là $D(A) = X$ và miền ảnh $R(A)$ nằm trong X^*. Toán tử A được gọi là

1) đơn điệu (monotone) nếu

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \ge 0, \forall x, y \in D(A);$$

2) đơn điệu chặt (strictly monotone) nếu dấu bằng chỉ xảy ra khi $x = y$;

3) đơn điệu đều nếu tồn tại một hàm không âm $\delta(t)$ không giảm với $t \le 0, \delta(t) = 0$ và

$$\langle A(x) - A(y), x - y\rangle \ge \delta\left(\|x - y\|\right), \forall x, y \in D(A).$$

Nếu $\delta(t) = c_A t^2$ với c_A là một hằng số dương thì toán tử A được gọi là đơn điệu mạnh.

Ví dụ 1.8. Toán tử tuyến tính $A : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ được xác định bởi

$$A = B^T B$$

với B là một ma trận vuông cấp M, là một toán tử đơn điệu.

Định nghĩa 1.14. Ánh xạ $U^s : X \to X^*$ (nói chung là đa trị) xác định bởi

$$U^s(x) = \left\{ x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = \|x^*\| \,.\, \|x\| \,;\, \|x^*\| = \|x\|^{s-1} \right\}, s \geq 2$$

được gọi là ánh xạ đối ngẫu tổng quát của không gian X. Khi $s = 2$ thì U^s thường được viết là U và được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của X.

Nhận xét 1.2.

i) Trong không gian Hilbert H, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc chính là toán tử đơn vị I trong H.

ii) Ánh xạ đối ngẫu là một trong những ví dụ về toán tử đơn điệu, nó tồn tại trong mọi không gian Banach.

Ví dụ 1.9. Với $X = L^p(\Omega), 1 < p < \infty$ và Ω là một tập đo được của không gian $\mathbb{R}^n$ thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc có dạng

$$(Ux)(t) = \|x\|^{2-p} |x(t)|^{p-2} x(t), t \in \Omega.$$

1.1.3. Phương trình toán tử

Cho X là một không gian Banach phản xạ thực, X^* là không gian liên hợp của X với $f \in X^*$ cho trước.

Bổ đề 1.1.

Cho X là một không gian Banach thực, $f \in X^*$ và A là một toán tử h-liên tục từ X vào X^*. Khi đó, nếu có

$$\langle A(x) - f, x - x_0 \rangle \geq 0, \forall x \in X,$$

thì

$$A(x_0) = f.$$

Chứng minh.