ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LAN

PHƯƠNG PHÁP ĐIỂM GẦN KỀ GIẢI MÔ HÌNH CÂN BẰNG NASH - COURNOT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG LAN

PHƯƠNG PHÁP ĐIỂM GẦN KỀ GIẢI MÔ HÌNH CÂN BẰNG NASH - COURNOT

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60. 46. 01. 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS. TSKH. LÊ DŨNG MƯU

THÁI NGUYÊN - 2013

Mục lục

Mở đầu

Bài toán bất đẳng thức biến phân là một công cụ rất hữu hiệu để nghiên cứu và giải các bài toán ứng dụng như bài toán cân bằng trong kinh tế, tài chính, vận tải, lý thuyết trò chơi, bài toán cân bằng mạng ... Trong đó có mô hình cân bằng bán độc quyền Nash-Cournot. Mô hình cân bằng thị trường bán độc quyền được Cournot đưa ra vào năm 1838 và được rất nhiều tác giả trên thế giới tập trung nghiên cứu. Sau nay nó được mô tả như một trường hợp đặc biệt của mô hình cân bằng Nash trong lý thuyết trò chơi không hợp tác gồm n người chơi, vì vậy nó được gọi là mô hình cân bằng thị trường Nash-Cournot. Gần đây người ta quan tâm nhiều đến việc giải quyết bài toán trên vì những ứng dụng của nó vào thực tiễn cuộc sống là rất đa dạng, đặc biệt là trong lĩnh vực kinh tế.

Mục đích chính của luận văn là trình bày về mô hình cân bằng Nash-Cournot cho cước phí tuyến tính và đặc biệt là trường hợp cước phí lõm. Khi cước phí lõm, mô hình cân bằng Nash-Cournot được mô tả dưới dạng bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp DC. Luận văn đã mô tả thuật toán lặp dựa trên ý tưởng của phương pháp điểm gần kề để tính điểm dừng của bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp lõm. Ngoài phần mở đầu, kết luận và các tài liệu tham khảo, các kết quả nghiên cứu trong luận văn này được trình bày thành hai chương với tiêu đề sau:

Chương 1: Mô hình cân bằng Nash-Cournot cước phí tuyến tính. Chương này nhắc lại một số kiến thức cơ sở về không gian Hilbert thực, giải tích lồi và một số khái niệm về ánh xạ đơn điệu, toán tử đơn điệu cùng với một số kết quả liên quan đến tính đơn điệu của toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert. Đồng thời giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp và mô hình cân bằng Nash-Cournot với cước phí tuyến tính

Chương 2: Mô hình cân bằng Nash-Cournot cước phí lõm. Chương này giới thiệu về mô hình cân bằng thị trường Nash-Cournot với cước phí lõm và giới thiệu phương pháp giải mô hình trong trường hợp hàm chi phí là hàm lõm bằng phương pháp tìm điểm dừng theo thuật toán điểm gần kề.

Để hoàn thành được luận văn này em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS.TSKH Lê Dũng Mưu (Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam), người đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ em trong suốt quá tình học tập và nghiên cứu để em có thể hoàn thiện luận văn này.

Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới quý thầy cô giáo giảng dạy tại Đại học Thái Nguyên và tại Viện Toán học đã mang đến cho em nhiều kiến thức bổ ích không chỉ trong khoa học mà còn cả trong cuộc sống.

Tôi xin chân thành cảm ơn các bạn đồng môn đã giúp đỡ tôi trong thời gian học tập tại Đại học Thái Nguyên và trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng, con xin cảm ơn bố mẹ. Nhờ có bố mẹ không quản gian khó, vất vả sớm khuya nhưng vẫn tạo mọi điều kiện tốt nhất để con có được thành quả ngày hôm nay.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn trực tiếp của GS. TSKH. Lê Dũng Mưu. Mặc dù, em đã hết sức cố gắng nhưng do vấn đề được nghiên cứu là phức tạp và mới mẻ, lại do thời gian có hạn và kinh nghiệm nghiên cứu còn hạn chế nên khó tránh khỏi thiếu sót. Em mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô và các bạn.

Thái Nguyên, tháng 9 - 2013

Người viết Luận văn

Nguyễn Thị Phương Lan

Chương 1

MÔ HÌNH CÂN BẰNG NASH-COURNOT CƯỚC PHÍ TUYẾN TÍNH

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

Nội dung chính của chương bao gồm: một số kiến thức cơ sở về không gian Hilbert thực và giải tích lồi. Tiếp sau đó là các khái niệm về ánh xạ đơn điệu, toán tử đơn điệu. Đồng thời trình bày một số kết quả liên quan đến tính đơn điệu của các toán tử đơn trị và đa trị trong không gian Hilbert. Bên cạnh đó cũng giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp và mô hình cân bằng Nash-Cournot với cước phí tuyến tính. Các kiến thức trong chương này chủ yếu lấy từ các tài liệu [1], [2], [4], [7].

1.1.1 Toán tử trong không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1. *Cho không gian véctơ X trên trường số $K(K = \mathbb{R})$. Một ánh xạ từ $X \times X \to K$ được gọi là tích vô hướng trên X nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau:*
(i) $\langle x, x\rangle \geq 0, \forall x \in X, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle, \forall x, y \in X$;
(iii) $\langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle, \forall x, x', y \in X$;
(iv) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \forall x, y \in X, \lambda \in K$;
Số $\langle x, y\rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai véctơ x, y.

Chú ý 1.1. *Từ định nghĩa tích vô hướng và các điều kiện (ii) và (iv) ta suy ra:*

-) $\langle x, y+y'\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x, y'\rangle, \forall x, y, y' \in X$,
-) $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle, \forall x, y \in X, \lambda \in K$.

Định nghĩa 1.2. *Cho X là một không gian tuyến tính thực, X được gọi là không gian tiền Hilbert nếu với mọi $x, y \in X$ xác định một số thực được kí hiệu là $\langle x, y\rangle$ là tích vô hướng của x,y thỏa mãn các tính chất sau:*
(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$, *nếu* $x \neq 0; \langle x, x\rangle = 0$, *nếu* $x = 0$*;*
(ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$*;*
(iii) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$*;*
(iv) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Định lý 1.1. *Trong không gian tiền Hilbert X, với mỗi $x, y \in X$ ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, y\rangle.\langle y, y\rangle$$

được gọi là bất đẳng thức Schwarz.

Chứng minh

Với $y = 0$ bất đẳng thức luôn đúng.
Giả sử $y \neq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \geq 0$$

hay

$$\langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle \geq 0.$$

Chọn $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ ta được:

$$\langle x, y\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} \geq 0.$$

Từ đó suy ra $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, y\rangle.\langle y, y\rangle$.

□

Dấu $'' ='' $ trong bất đẳng thức Schwarz xảy ra khi và chỉ khi x, y phụ thuộc tuyến tính.

Định lý 1.2. *Mọi không gian tiền Hilbert X là không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn được xác định*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \forall x \in X$$

với kí hiệu này bất đẳng thức Schwarz được viết thành $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.

Chứng minh

Từ (i) trong định nghĩa tích vô hướng ta suy ra:

$$\forall x \in X, \|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Từ (i) và (iv) trong định nghĩa tích vô hướng ta có:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \|x\|^2} = |\lambda| \, \|x\| \, , \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mặt khác $\forall x, y \in X$ ta có:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 =& \langle x+y, x+y\rangle \\ =& \|x\|^2 + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ =& \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ \leq& \|x\|^2 + 2\,|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$\|\langle x+y\rangle\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2,$$

vậy $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Như thế $\|.\|$ là một chuẩn trên H.

□

Định lý 1.3. *Cho* X *là không gian tiền Hilbert, với mọi* $x, y \in X$ *ta luôn có bất đẳng thức hình bình hành sau đây:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Chứng minh

Với mọi $x, y \in X$ ta có:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \|y\|^2,$$

cộng hai bất đẳng thức trên ta được:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 =& \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ =& 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \end{aligned}$$

Vậy định lý được chứng minh.

□

Định nghĩa 1.3. *Cho X là một không gian định chuẩn, dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là dãy cơ bản trong X nếu:*

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0.$$

Nếu trong X mọi dãy cơ bản đều hội tụ, tức là $\|x_n - x_m\| \to 0$, kéo theo sự $\exists x_0 \in X$ sao cho $x_n \to x_0$ thì X được gọi là không gian đủ.

Định nghĩa 1.4. *Nếu X là không gian tiền Hilbert và đầy đủ thì X được gọi là không gian Hilbert.*
Trong luận văn này ta thống nhất kí hiệu H là một không gian Hilbert thực.

Định lý 1.4. *Giả sử $\{x_n\}, \{y_n\}$ là hai dãy trong không gian Hilbert H sao cho $x_n \to x_0, y_n \to y_0$. Lúc đó*

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle, \ \textit{khi } n \to \infty.$$

Chứng minh
Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ trong không gian H.
Ta cần chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ trong H.
Thật vậy

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| &= |\langle x_n, y_n\rangle + \langle x_n, y_0\rangle - \langle x_n, y_0\rangle - \langle x_0, y_0\rangle| \\ &\le |\langle x_n, y_n - y_0\rangle| + |\langle x_n - x_0, y_0\rangle| \\ &\le \|x_n\| \, \|y_n - y_0\| + \|x_n - x_0\| \, \|y_0\| \, . \end{aligned}$$

Vì dãy $\{x_n\}$ hội tụ trong H nên $\exists M > 0$ sao cho $\|x_n\| \le M, \forall$n $\in \mathbb{N}$. Khi đó bất đẳng trên trở thành:

$$|\langle x_n - y_n\rangle - \langle x_0 - y_0\rangle| \le M \, \|y_n - y_0\| + \|y_0\| \, \|x_n - x_0\| \, ,$$

cho $n \to \infty$ theo giả thiết ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x_0, y_0\rangle.$$

□

Định nghĩa 1.5. *Hai véctơ* $x, y \in H$ *được gọi là hai véctơ trực giao với nhau kí hiệu là* $x \perp y$ *nếu* $\langle x, y\rangle = 0$.

Từ định nghĩa dễ dàng suy ra các tính chất đơn giản sau đây:

1. $0 \perp x, \forall x \in H$;
2. $x \perp y \Rightarrow y \perp x, \forall x, y \in H$;
3. $x \perp \{y_1, y_2, ..., y_n\} \Rightarrow x \perp \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n, \forall x \in H, n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n$;
4. $x \perp y_n, y_n \to y$ khi $n \to \infty$ thì $x \perp y, \forall x, y \in H$.

Định nghĩa 1.6. *Cho tập* $M \subset H$*, phần bù trực giao của* M*, kí hiệu là* $M^{\perp}$*, là tập hợp sau:*

$$M^{\perp} = \{x \in H : x \perp y, \forall y \in M\}.$$

Định lý 1.5. *(Định lý F.Riesz)*

Với mỗi véctơ a cố định thuộc không gian Hilbert H, hệ thức:

$$f(x) = \langle a, x\rangle, \tag{1.1}$$

xác định một phiếm hàm tuyến tính liên tục f(x) trên không gian H, với:

$$\|f\| = \|a\|. \tag{1.2}$$

Ngược lại, bất kỳ phiếm hàm tuyến tính liên tục f(x) nào trên không gian Hilbert H cũng đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng (1.1) trong đó a là một véctơ của H thỏa mãn (1.2).

Chứng minh

Phần thứ nhất của định lý, ta dễ dàng chứng minh được vì $f(x) = \langle a, x\rangle$, rõ ràng là một phiếm hàm tuyến tính và do

$$|f(x)| = |\langle a, x\rangle| \le \|a\| \times \|x\|; \tag{1.3}$$

$$|f(a)| = |\langle a, a\rangle| \le \|a\| \times \|a\|, \tag{1.4}$$

nên phiếm hàm đó giới nội và thỏa mãn (1.2). Để chứng minh phần ngược lại, ta xét một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ trên không gian Hilbert H. Tập hợp

$$M = \{x \in H : f(x) = 0\},$$

rõ ràng là một không gian con đóng của H.