ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ THU HIỀN

SỐ TỔ HỢP SUY RỘNG VÀ MỘT VÀI PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG BÀI TOÁN TỔ HỢP

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2013

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ THU HIỀN

TỔ HỢP SUY RỘNG VÀ MỘT VÀI PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG BÀI TOÁN TỔ HỢP

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
MÃ SỐ: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS ĐÀM VĂN NHỈ

Thái Nguyên - 2013

Mục lục

Mở đầu

Tổ hợp là một phần rất quan trọng của Toán học rời rạc, chuyên nghiên cứu sự sắp xếp hoặc phân bố các đối tượng và tính số cách sắp xếp ấy. Chủ đề này đã được nghiên cứu từ lâu, thế kỷ 17, khi xét các trò chơi may rủi. Thông thường, số các phần tử là hữu hạn và việc phân bố chúng phải thỏa mãn những điều kiện nhất định nào đấy, tùy theo yêu cầu của vấn đề nghiên cứu. Do việc đếm các đối tượng hoặc diễn đạt bài toán dưới dạng sắp xếp, có kể thứ tự hoặc không, các phần tử của một tập hợp, nên ta thường gặp bài toán tổ hợp dưới dạng sau:

1. Bài toán đếm: Đây là bài toán nhằm trả lời câu hỏi "có bao nhiêu cách sắp xếp các phần tử thỏa mãn điều kiện đã nêu?" Phương pháp đếm thường dựa vào một số nguyên lý và một số tính toán không quá phức tạp.

2. Bài toán liệt kê: Đây là bài toán xét tất cả các khả năng nhằm trả lời câu hỏi "thuật toán nào vét hết các khả năng sắp xếp và có bao nhiêu cách sắp xếp các phần tử thỏa mãn điều kiện đã nêu?"

3. Bài toán tối ưu: Đây là bài toán xét những cách sắp xếp tốt nhất, theo một nghĩa nào đó, trong số những cách sắp xếp có thể.

4. Bài toán tồn tại: Đây là bài toán xét sự tồn tại hay không tồn tại cách sắp xếp các phần tử theo yêu cầu đã được đặt ra.

Một vấn đề dễ thấy là các bài toán tổ hợp cũng thường xuất hiện trong các kỳ thi Đại học và Cao đẳng, các kỳ thi Học sinh giỏi cấp quốc gia hay quốc tế. Chúng là những bài toán khó. Đặc biệt, để phục vụ tốt cho việc giảng dạy chương "Tổ hợp và Xác xuất" ở lớp 11, giúp học sinh thi Đại học và Cao đẳng và với mong muốn được tìm hiểu sâu hơn nữa về những bài toán tổ hợp nên chúng tôi chọn đề tài ***"Tổ hợp suy rộng***

và một vài phương pháp xây dựng bài toán tổ hợp." Luận văn tập trung tìm hiểu Bài toán đếm và Bài toán liệt kê (dạng đơn giản).

Ngoài phần mở đầu, và kết luận, luận văn được chia ra làm 2 chương.

Chương 1. Tổ hợp suy rộng.

Chương này tập trung trình bày phương pháp quy nạp ở Mục1.1; hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp, nhị thức Newton ở Mục 1.2; chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng ở Mục 1.3; còn một số phương pháp xây dựng bài toán tổ hợp được trình bày ở Mục 1.4.

Chương 2 . Một vài ứng dụng của tổ hợp.

Trong chương này chúng tôi tập trung trình bày một số ứng dụng của tổ hợp để biểu diễn một vài bài toán. Mục 2.1 trình bày cách vận dụng tổ hợp và hoán vị để biểu diễn số qua Định lí Hilbert và Định lí Cantor. Mục 2.2 trình bày công thức khai triển đa đơn thức. Nó là công thức khai triển nhị thức Newton tổng quát. Trong Mục 2.3 chúng tôi trình bày phương pháp sử dụng chỉ số và công thức chuyển đổi ngược. Đồng nhất thức Newton được trình bày ở Mục 2.4 và cuối cùng là việc chứng minh Định lí Fermat và Định lí Wilson.

Luận văn này được hoàn thành với sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của PGS -TS. Đàm văn Nhỉ - Trường ĐHSP1- Hà nội. Từ đáy lòng mình, em xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và sự chỉ bảo hướng dẫn của Thầy.

Em xin trân trọng cảm ơn tới các Thầy Cô trong Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên, phòng Đào Tạo Trường Đại Học Khoa Học. Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao Học Toán K5A Trường Đại Học Khoa Học đã động viên giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tôi xin cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Hà Giang, Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp Trường THPT Hùng An - Huyện Bắc Quang đã tạo điều kiện và giúp đỡ tôi hoàn thành kế hoạch học tập.

Tuy nhiên, do sự hiểu biết của bản thân và khuôn khổ của luận văn, nên luận văn này không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự chỉ dẫn và góp ý của các Thầy Cô, bạn bè để tôi hoàn thành tốt hơn bản luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 02 tháng 04 năm 2013

Tác giả

Phạm Thị Thu Hiền

Chương 1
Tổ hợp suy rộng

Nội dung chương một tập trung bàn về tổ hợp suy rộng. Chúng ta bắt đầu chương bằng cách trình bày phương pháp quy nạp.

1.1. Phép chứng minh quy nạp

1.1.1. Quan hệ tương đương và quan hệ thứ tự

Giả thiết tập $X \neq \emptyset$. Tích đề các $X \times X$ được định nghĩa dưới đây:

$$X \times X = \{(x, y)|x, y \in X\}$$

Định nghĩa 1.1. Tập con S của $X \times X$ là một *quan hệ hai ngôi* trong X. Nếu $(x, y) \in S$ thì ta nói x *quan hệ* S *với* y và viết xSy.

Định nghĩa 1.2. Giả thiết $X \neq \emptyset$ và $S \neq \emptyset$ là một quan hệ hai ngôi trong X. Quan hệ S được gọi là một *quan hệ tương đương* trong X nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau đây:

(i) (Phản xạ) Với mọi $x \in X$ có xSx.

(ii) (Đối xứng) Với mọi $x, y \in X$, nếu có xSy thì cũng có ySx.

(iii) (Bắc cầu) Với mọi $x, y, z \in X$, nếu có xSy và ySz thì cũng có xSz.

Khi S là một quan hệ tương đương trong X thì ta thường kí hiệu $\sim$ thay cho S. Đặt $\mathrm{C}(x) = \{y \in X|y \sim x\}$ và gọi nó là một *lớp tương đương* với x làm *đại diện.* Dễ dàng chỉ ra các tính chất sau:

Tính chất 1.1. *Giả sử $\sim$ là một quan hệ tương đương trong X. Khi đó:*

(i) *Với mọi $x \in X$ có $x \in C(x)$.*

(ii) *Với mọi $y, z \in C(x)$ có $y \sim z$, $y \sim x$ và $z \sim x$.*

(iii) *Với mọi $x, y \in X$, có hoặc $C(x) \cap C(y) = \emptyset$ hoặc $C(x) = C(y)$.*

(iv) *Tập thương $X/\sim$ là tập các lớp tương đương không giao nhau.*

Ví dụ 1.1. *Tính tổng của tất cả các số gồm 9 chữ số phân biệt được lập từ các số* $1, 2, \ldots, 8, 9$.

Bài giải: Tập các số thỏa mãn đầu bài được phân ra làm 9 lớp phân biệt cùng lực lượng: Lớp $C(i) = \{\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8i} | a_k \in \{1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{i\}\}$ gồm tất cả các số được lập qua việc viết chữ số i vào cuối các số $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8}$ với các $a_k \in \{1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{i\}$. Thấy ngay lực lượng của $C(i)$ bằng $8!$. Vậy tổng các chữ số hàng đơn vị của tất cả các số thỏa mãn đầu bài bằng $8!(1 + 2 + \cdots + 8 + 9) = 45.8!$. Từ đây có tổng các số cần tính $S = 45.8!(1 + 10 + \cdots + 10^8) = 45.8!\dfrac{10^9 - 1}{9} = 5(10^9 - 1).8!$.

Định nghĩa 1.3. Giả thiết $X \neq \emptyset$ và $S \neq \emptyset$ là một quan hệ hai ngôi trong X. Quan hệ S được gọi là một *quan hệ thứ tự* trong X nếu nó thỏa mãn ba điều kiện sau đây:

(i) (Phản xạ) với mọi $x \in X$ có xSx.

(ii) (Phản đối xứng) Với mọi $x, y \in X$, nếu có xSy và ySx thì $x = y$.

(iii) (Bắc cầu) Với mọi $x, y, z \in X$, nếu có xSy và ySz thì cũng có xSz.

Tập X được gọi là một *tập xắp thứ tự* nếu có một quan hệ thứ tự trong X.

Khi S là một quan hệ thứ tự trong X thì ta thường viết $\leqslant$ thay cho S. Với $x, y \in X$, thay cho việc viết xSy thì ta viết $x \leqslant y$ và đọc là *x nhỏ hơn hoặc bằng y* hoặc viết $y \geqslant x$ và đọc là *y lớn hơn hoặc bằng x*. Từ đây ta có thể định nghĩa $x < y$ khi và chỉ khi $x \leqslant y, x \neq y$; hoặc $y > x$ khi và chỉ khi $y \geqslant x, y \neq x$.

Định nghĩa 1.4. Giả thiết X là một tập xắp thứ tự với quan hệ thứ tự $\leqslant$. Phần tử $a \in X$ được gọi là *phần tử bé nhất* của X nếu nó thỏa mãn $a \leqslant x$ với mọi $x \in X$. Phần tử $b \in X$ được gọi là *phần tử lớn nhất* của X nếu nó thỏa mãn $x \leqslant b$ với mọi $x \in X$.

Định nghĩa 1.5. Tập xắp thứ tự X được gọi là một *tập xắp thứ tự tốt* nếu mọi bộ phận khác rỗng của X đều có phần tử bé nhất.

Hai kết quả sau đã được chứng minh trong bất kì giáo trình số học nào.

Mệnh đề 1.1. *Tập tất cả các số tự nhiên $\mathbb{N}$ cùng quan hệ thứ tự là một tập xắp thứ tự tốt.*

Mệnh đề 1.2. *Nếu tập bất kì $M \subset \mathbb{N}$ có các tính chất: $0 \in M$ và $n+1 \in M$ khi $n \in M$, thì $M = \mathbb{N}$.*

Ví dụ 1.2. *Xác định số nguyên dương k để sao cho tập hợp $X = \{2012, 2012+1, 2012+2, \ldots, 2012+k\}$ có thể phân ra làm hai tập A và B thỏa mãn $A \cap B = \emptyset, A \cup B = X$ và tổng của các số thuộc tập A đúng bằng tổng của các số thuộc tập B.*

Bài giải: Trước tiên ta tìm điều kiện cho k. Giả sử có hai tập A và B thỏa mãn đầu bài. Đặt s là tổng của tất cả các số thuộc tập A. Khi đó tập B cũng có tổng các số bằng s và tập X có tổng của tất cả các số bằng $2s$. Vậy $4s = 2[2012 + (2012+1) + (2012+2) + \cdots + (2012+k)]$ $= 4024(k+1) + k(k+1)$. Như vậy $k(k+1)$ chia hết cho 4 và từ đây suy ra $k \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ hoặc $k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$.
Xét trường hợp (1): $k \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$. Dễ dàng suy ra: Số phần tử thuộc tập X phải là bội của 4. Hiển nhiên, 4 số tự nhiên liên tiếp $n, n+1, n+2, n+3$ luôn thỏa mãn $n+n+3 = n+1+n+2$ và $\{n, n+3\} \cap \{n+1, n+2\} = \emptyset$. Tập X thỏa mãn tính chất đòi hỏi.
Trường hợp (2): $k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$. Trong trường hợp này, số phần tử của tập X phải là số lẻ. Giả sử X được phân ra làm hai tập rời nhau A và B và $A \cap B = \emptyset$. Ta có thể giả thiết $\mathrm{Card}(A) > \mathrm{Card}(B)$. Đặt $k = 4m$ với số tự nhiên m. Khi đó $\mathrm{Card}(A) \geqslant 2m+1, \mathrm{Card}(B) \leqslant 2m$. Ta có $s \geqslant 2012 + (2012+1) + \cdots + (2012+2m)$ và $s < (2012+2m+1) + \cdots + (2012+4m)$. Như vậy, ta có được $2012 + (2012+1) + \cdots + (2012+2m) \leqslant s < (2012+2m+1) + \cdots + (2012+4m)$ hay $2012 < 2m.2m$ hay $m \geqslant 23$ và $k = 4m \geqslant 23.4 = 92$.
Khi $k = 92$: Ta xét $A_1 = \{2012, 2012+1, \ldots, 2012+46\}$ với tổng các số $a_1 = 2012 + (2012+1) + \cdots + (2012+46)$; và $B_1 = \{(2012+47) + \cdots + (2012+92)$ với tổng các số $b_1 = (2012+47) + \cdots + (2012+92)$. Ta có ngay $b_1 - a_1 = 46.46 - 2012 = 104$. Thế số $2012+52$ trong B_1 bởi số 2012 và thế số 2012 của A_1 bởi số $2012+52$. Khi đó $A = A_1 \setminus \{2012\} \cup \{2012+52\}$ và $B = B_1 \setminus \{2012+52\} \cup \{2012\}$ thỏa mãn đề bài.