... HỮU MÌNH (chủ biên) - TẠ DUY LỢI
... THANH - LÊ TRỌNG TƯỜNG

# BÀI TẬP VẬT LÍ LÍ THUYẾT

## TẬP HAI

## (CƠ HỌC LƯỢNG TỬ - VẬT LÍ THỐNG KÊ)





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

NGUYỄN HỮU MÌNH (chủ biên)
TẠ DUY LỢI - ĐỖ ĐÌNH THANH – LÊ TRỌNG TƯỜNG

# Bài tập
# VẬT LÍ LÍ THUYẾT

## Tập hai

## (Cơ học lượng tử – Vật lí thống kê)

*(Tái bản lần thứ hai)*



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

04 – 2009/CXB/376 – 2117/GD Mã số : 7K536h9 – DAI

# *Phần III*

# CƠ HỌC LƯỢNG TỬ

## A – ĐỀ BÀI

### §1. NHỮNG CƠ SỞ VẬT LÍ CỦA CƠ HỌC LƯỢNG TỬ MẪU NGUYÊN TỬ RƠZEPHO (RUTHEFORD) LÍ THUYẾT BO (BOHR)

**1.** Xác định năng lượng, khối lượng và xung lượng của phôtôn có bước sóng tương ứng với :

a) Ánh sáng trông thấy có $\lambda = 0,7\mu m$

b) Bức xạ Rơnghen có $\lambda = 0,25Å$

c) Bức xạ gamma có $\lambda = 0,016Å$

**2.** Ánh sáng có bước sóng $\lambda = 4,2.10^{-7}$m được chiếu trên mặt kim loại kali. Công thoát của êlectrôn từ mặt kim loại kali bằng $3,2.10^{-19}$J. Xác định vận tốc cực đại của êlectrôn bay ra từ mặt kim loại kali.

**3.** Tìm công thức để tính bước sóng Đơ Brơi (DeBroglie) cho hạt tương đối tính.

**4.** Tìm bước sóng Đơ Brơi cho các trường hợp sau :

a) Êlectrôn bay qua các hiệu điện thế 1V, 100V, 1000V

b) Êlectrôn bay với vận tốc $v = 10^8$ cm/s

c) Êlectrôn chuyển động với năng lượng 1 MeV.

d) Quả cầu có khối lượng 1g chuyển động với vận tốc $v = 1$m/s.

**5.** Dùng điều kiện lượng tử hoá Bo $\oint pdq = nh$ (q là toạ độ suy rộng tương ứng với xung lượng suy rộng p, n là số nguyên n = 1, 2, 3... và h là hằng số Plăng) (Planck) để tìm :

a) Bán kính quỹ đạo Bo thứ nhất và thứ hai của êlectrôn trong nguyên tử hiđrô và các vận tốc của nó trên các quỹ đạo đó.

b) Các mức năng lượng của êlectrôn trong nguyên tử hiđrô xác định giá trị mức năng lượng của êlectrôn trên quỹ đạo Bo thứ nhất.

c) Bước sóng của vạch quang phổ khi êlectrôn trong nguyên tử hiđrô chuyển từ quỹ đạo lượng tử thứ tư (n = 4) về quỹ đạo lượng tử thứ hai (n = 2).

**6.** Dùng điều kiện lượng tử hóa Bo để tìm các mức năng lượng của dao động tử điều hoà một chiều với tần số ω.

**7.** Hàm sóng của hạt trong giếng thế một chiều có dạng :

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)$$

trong đó $0 \leq x \leq d$ với n = 1, 2, 3, 4... Xác định A từ điều kiện chuẩn hoá hàm sóng.

**8.** Trạng thái của hạt được mô tả bằng hàm sóng :

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2a^2} + ikx}$$

trong đó A, a, k là những hằng số.

a) Từ điều kiện chuẩn hoá hàm sóng xác định A.

b) Xác định x để cho mật độ xác suất tìm thấy hạt có trị lớn nhất.

c) Tìm xác suất để hạt nằm trong khoảng từ –a đến +a trên trục x. Cho biết :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad , \qquad \int_0^1 e^{-x^2} dx = 0{,}84 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**9.** Hàm sóng của êlectrôn trong nguyên tử hiđrô ở trạng thái cơ bản (trạng thái có mức năng lượng thấp nhất) có dạng :

$$\varphi(r) = A e^{-\frac{r}{a}}$$

trong đó $a = 0{,}529.10^{-10}$m là bán kính quỹ đạo Bo thứ nhất.

a) Dùng điều kiện chuẩn hoá hàm sóng xác định A.

b) Xác định r để cho mật độ xác suất theo bán kính có giá trị lớn nhất.

## §2. TOÁN TỬ

**10.** Chứng minh rằng :

a) $\dfrac{d^2}{dx^2} x^2 = x^2 \dfrac{d^2}{dx^2} + 4x \dfrac{d}{dx} + 2,$

b) $\left( \dfrac{d}{dx} x \right)^2 = x^2 \dfrac{d^2}{dx^2} + 3x \dfrac{d}{dx} + 1\,.$

**11.** Chứng minh rằng nếu các toán tử $\hat{A}$ và $\hat{B}$ là những toán tử tuyến tính thì toán tử $(\hat{A} + \hat{B})$ và toán tử $\hat{A}\hat{B}$ cũng là những toán tử tuyến tính.

**12.** Chứng tỏ rằng nếu các toán tử $\hat{A}$ và $\hat{B}$ là những toán tử ecmit thì các toán tử $(\hat{A} + \hat{B})$ và $(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})$ là những toán tử ecmit. Với điều kiện nào thì $\hat{A}\hat{B}$ hoặc $\hat{B}\hat{A}$ là toán tử ecmit ?

**13.** Chứng tỏ rằng các toán tử sau đây là ecmit :

a) $\hat{x} = x,\ \hat{y} = y,\ \hat{z} = z,\ \hat{p}_x = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$,

$$\hat{p}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y},\ \hat{p}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$$

b) $\hat{H} = \dfrac{\widehat{p_x^2} + \widehat{p_y^2} + \widehat{p_z^2}}{2m} + U(x,y,z)$

(m là khối lượng của hạt, U là thế năng của hạt)

c) $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x,\ \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z,\ \hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$

$$\widehat{L^2} = \widehat{L_x^2} + \widehat{L_y^2} + \widehat{L_z^2}$$

**14.** Chứng minh rằng nếu $\hat{A}$, $\hat{B}$ là những toán tử ecmit thì

$$[\hat{A},\hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = i\hat{C}$$

trong đó $\hat{C}$ là toán tử ecmit.

**15.** Chứng minh rằng nếu $\hat{A}$, $\hat{B}$ là những toán tử ecmit, $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ và $\alpha$ là số thực thì :

$$\int |(\alpha\hat{A} - i\hat{B})\psi(x)|^2\,dx = \int \psi^*(x)(\alpha^2\widehat{A^2} + \alpha\hat{C} + \widehat{B^2})\psi(x)dx$$

**16.** Toán tử tịnh tiến một vectơ vô cùng bé $\vec{a}$ được kí hiệu là $\hat{T}_{\vec{a}}$ và được định nghĩa như sau :

$$\hat{T}_{\vec{a}}\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{a})$$

Tìm dạng toán tử tịnh tiến $\hat{T}_{\vec{a}}$ và biểu diễn nó qua toán tử xung lượng

$$\hat{p} = -i\hbar\left[\vec{r}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{z}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right] = -i\hbar\nabla$$

**17.** Tìm toán tử quay một góc $\delta\varphi$ rất bé quay hướng $\vec{n}_0$ và biểu diễn nó qua toán tử mômen xung lượng $\hat{L} = [\vec{r} \wedge \vec{p}]$. Cho biết toán tử quay một góc bé $\delta\vec{\varphi} = \vec{n}_0\delta\varphi$ được kí hiệu là $\hat{R}(\delta\vec{\varphi})$ và được định nghĩa như sau :

$$\hat{R}(\delta\vec{\varphi})\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \delta\vec{r})$$

trong đó $\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi} \wedge \vec{r}]$.

**18.** Toán tử $A^+$ được gọi là toán tử liên hiệp ecmit với toán tử $\hat{A}$ nếu :

$$\int\psi(x)(\widehat{A^+}\varphi(x))^* dx = \int\varphi^*(x)\hat{A}\psi(x)dx$$

Chứng minh rằng :

a) Toán tử $\hat{A}$ là toán tử ecmit nếu $\widehat{A^+} = \hat{A}$

b) $(\hat{A}\hat{B})^+ = \widehat{B^+}\widehat{A^+}$

c) $[\hat{A},\hat{B}]^+ = [\widehat{B^+},\widehat{A^+}]$

**19.** Chứng minh rằng ta có các hệ thức giao hoán giữa các toán tử sau :

a) $y\widehat{p_x} - \widehat{p_x}y = 0, \quad z\widehat{p_x} - \widehat{p_x}z = 0, \quad x\widehat{p_x} - \widehat{p_x}x = i\hbar.$

b) $x\widehat{L_x} - \widehat{L_x}x = -i\hbar z, \quad z\widehat{L_x} - \widehat{L_x}z = i\hbar y$

trong đó $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $\widehat{L_x} = y\widehat{p_z} - z\widehat{p_y}$.

**20.** Đặt $\widehat{L_+} = \widehat{L_x} + i\widehat{L_y}$, $\widehat{L_-} = \widehat{L_x} - i\widehat{L_y}$ chứng minh rằng :

a) $\widehat{L_z}\widehat{L_+} - \widehat{L_+}\widehat{L_z} = \hbar\widehat{L_+}$

b) $\widehat{L_z}\widehat{L_-} - \widehat{L_-}\widehat{L_z} = -\hbar\widehat{L_-}$

c) $\widehat{L_z}(\widehat{L_-}\widehat{L_+}) - (\widehat{L_-}\widehat{L_+})\widehat{L_z} = 0$

d) $\widehat{L^2} = \widehat{L_-}\widehat{L_+} + \widehat{L_z^2} + \hbar\widehat{L_z}$.

e) $\widehat{L_z}\widehat{L^2} - \widehat{L^2}\widehat{L_z} = 0$, $\widehat{L_y}\widehat{L^2} - \widehat{L^2}\widehat{L_y} = 0$, $\widehat{L_x}\widehat{L^2} - \widehat{L^2}\widehat{L_x} = 0$

trong đó $\widehat{L^2} = \widehat{L_x^2} + \widehat{L_y^2} + \widehat{L_z^2}$.

**21.** Chứng minh rằng ta có các hệ thức giao hoán sau :

a) $\widehat{p_x}f(x) - f(x)\widehat{p_x} = -i\hbar\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}$

b) $\hat{p}\vec{A}(x,y,z) - \vec{A}(x,y,z)\hat{p} = -i\hbar\,\mathrm{div}\vec{A}$

trong đó $\widehat{p_x} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p} = -i\hbar\nabla$, $f(x)$ là hàm của x và $\vec{A}$ là vec tơ phụ thuộc vào x, y, z.

c) $\hat{E}t - t\hat{E} = i\hbar$ với $\hat{E} = i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}$ và t là thời gian.

**22.** Tìm hàm riêng và trị riêng của các toán tử sau đây :

a) $\hat{K} = -i\left(\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{d}{dx}\right)$ với a = const.

b) $\widehat{L_x} = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$.

c) $\widehat{P_x} = -i\hbar\dfrac{d}{dx}$ nếu hàm riêng của $\widehat{p_x}$ là $\psi(x)$ thoả mãn điều kiện $\psi(x) = \psi(x + a)$ với a = const.

d) $\hat{T} = \frac{\widehat{L_z^2}}{2I} = -\frac{\hbar^2}{2I}.\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$.

trong đó I = const (I là mômen quán tính và $\hat{T}$ là toán tử động năng của rôtato phẳng).

**23.** Toán tử Hamintơn $\hat{H}$ của hạt ở trong giếng thế vuông góc một chiều có dạng :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}.\frac{d^2}{dx^2} + U(x)$$

trong đó $U(x) = \begin{cases} 0 \text{ khi } 0 \le x \le d \\ \infty \text{ khi } x > d \text{ và } x < 0 \end{cases}$

Tìm hàm riêng đã chuẩn hoá và trị riêng của toán tử $\hat{H}$.

**24.** Gọi $L_z$ là trị riêng của toán tử $\widehat{L_z}$ và $L^2$ là trị riêng của toán tử $\widehat{L^2}$.

a) Chứng minh rằng $L^2 - L_z^2 \ge 0$.

b) Chứng tỏ rằng nếu $\psi_m(\varphi)$ là hàm riêng của toán tử $\widehat{L_z}$ tương ứng với trị riêng $m\hbar$ thì $\widehat{L_+}\psi_m(\varphi)$ và $\widehat{L_-}\psi_m(\varphi)$ cũng là những hàm riêng của toán tử $\widehat{L_z}$ tương ứng với các trị riêng $(m + 1)\hbar$ và $(m - 1)\hbar$.

c) Gọi $l$ là giá trị lớn nhất của m, chứng minh rằng $L^2 = \hbar^2 l(l + 1)$.

**25.** Tìm các trị riêng của toán tử $\widehat{L^2}$ tương ứng với hàm riêng :

$$Y(\theta, \varphi) = A\{\cos\theta + 2\sin\theta\cos\varphi\},\ A = \text{const}.$$