ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ BÍCH THÙY

# PHÂN BỐ GIÁ TRỊ ĐỐI VỚI ĐƠN THỨC VI PHÂN CỦA HÀM PHÂN HÌNH P - ADIC

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2014**

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

**NGUYỄN THỊ BÍCH THÙY**

# PHÂN BỐ GIÁ TRỊ ĐỐI VỚI ĐƠN THỨC VI PHÂN CỦA HÀM PHÂN HÌNH P - ADIC

**Chuyên ngành: Giải tích**

**Mã số: 60.46.01.02**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**Người hướng dẫn khoa học: TS. Vũ Hoài An**

**THÁI NGUYÊN - 2014**

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

# LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực, không trùng lặp với các đề tài khác và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

*Thái Nguyên, tháng 4 năm 2014*

Học viên

Nguyễn Thị Bích Thùy

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

# Mục lục



So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

## Các kí hiệu

- $\mathbb{C}_p$ : Trường số phức $p$ - adic
- $f$ : Hàm phân hình $p$ - adic
- $N_f(a, r)$: Hàm đếm của $f$ tại a
- $m_f(\infty, r)$ : Hàm xấp xỉ của $f$
- $T_f(r)$: Hàm đặc trưng của $f$.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

# MỞ ĐẦU

## Lý do chọn luận văn

Lý thuyết phân bố giá trị do Nevanlinna xây dựng được xem là thành tựu toán học đẹp đẽ nhất của toán học thế kỷ XX, mà ngày nay được gọi là Lý thuyết Nevanlinna. Nội dung chính của Lý thuyết phân bố giá trị là hai định lý cơ bản. Định lý cơ bản thứ nhất là mở rộng Định lý cơ bản của đại số, mô tả sự phân bố đều giá trị của hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ . Định lý cơ bản thứ hai là mở rộng Định lý Picard, mô tả ảnh hưởng của đạo hàm đến sự phân bố giá trị của hàm phân hình. Hà Huy Khoái là người đầu tiên xây dựng tương tự Lý thuyết phân bố giá trị cho trường hợp $p$ - adic. Ông và các học trò đã tương tự lý thuyết Nevanlinna cho trường số phức $p$ - adic mà ngày nay thường gọi là lý thuyết Nevanlinna $p$ - adic. Họ đã đưa ra hai Định lý chính cho hàm phân hình và ánh xạ chỉnh hình $p$ - adic. Một trong những ứng dụng sâu sắc của lý thuyết phân bố giá trị (phức và $p$ - adic) là Vấn đề xác định duy nhất cho các hàm phân hình khác hằng (phức và $p$-adic) qua điều kiện ảnh ngược của tập hợp điểm mà ngày nay được gọi là Định lý 5 điểm của Nevanlinna (hoặc tương tự của Định lý 5 điểm cho trường hợp $p$-adic).
Phân bố giá trị và vấn đề xác định duy nhất đã được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước xét trong mối liên hệ với đạo hàm của hàm phân hình và ảnh ngược của các điểm riêng rẽ. Người khởi xướng hướng nghiên cứu này là Hayman.
Năm 1967, Hayman đã chứng minh kết quả sau đây:
**Định lí A**[4]. Cho $f$ là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$ . Nếu $f(z) \neq 0$ và $f^{(k)}(z) \neq 1$ với $k$ là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{C}$, thì $f$ là hằng.

Năm 1967, Hayman cũng đưa ra giả thuyết sau đây:

**Giả thuyết Hayman**[4]. Nếu một hàm nguyên $f$ thỏa mãn $f^n(z)\,f'(z) \neq 1$ với $n$ là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{C}$ , thì $f$ là hằng.

Giả thuyết Hayman đã được Hayman kiểm tra đối với hàm nguyên siêu việt và $n > 1$ , đã được Clunie kiểm tra đối với $n \geq 1$ . Các kết quả này và các vấn đề liên quan đã hình thành nhánh nghiên cứu được gọi là sự lựa chọn của Hayman.

Tiếp đó, đối với các hàm nguyên $f$ và $g$, C. C. Yang và G. G. Gundersen đã nghiên cứu trường hợp ở đó $f^{(k)}$ và $g^{(k)}$ nhận giá trị 0 CM, $k = 0, 1$.

Công trình quan trọng đầu tiên thúc đẩy hướng nghiên cứu này thuộc về C.C.Yang – X.H. Hua.Năm 1997, hai ông đã chứng minh định lý sau đây:

**Định lí B[13].** Cho $f$ và $g$ là hai hàm phân hình khác hằng, $n \geq 11$ là một số nguyên và $a \in \mathbb{C}$ - $\{0\}$ . Nếu $f^n f'$và $g^n g'$ nhận giá trị a CM thì hoặc$f = dg$ với $d^{n+1} = 1$ hoặc $g(z) = c_1 e^{cz}$ và $f(z) = c_2 e^{-cz}$ , ở đó $c$, $c_1$, $c_2$ là các hằng số và thỏa mãn $(c_1 c_2)^{n+1} c^2 = -a^2$.

Từ đó, hướng nghiên cứu trên phát triển mạnh mẽ với những kết quả sâu sắc của I. Lahiri, Q. Han – H. X. Yi, W. Bergweiler, J. K. Langley, K. Liu, L. Z. Yang, L. C. Hong, M. L. Fang, B. Q. Li, P. C. Hu - C.C.Yang, A. Eremenko, G. Frank - X. Hua – R. Vaillancourt .... Công cụ sử dụng ở đó là một số kiểu định lí chính thứ hai cho đa thức vi phân cùng với với các ước lượng giữa hàm đặc trưng, hàm đếm của hàm và đạo hàm.

Trong trường hợp $p$-adic, kết quả đầu tiên theo hướng nghiên cứu này thuộc về J. Ojeda[11]. Năm 2008, J. Ojeda đã xét vấn đề nhận giá trị của $f' + Tf^n$ với $T$ là hàm hữu tỷ. Ở đó, J. Ojeda đã nhận được kết quả sau:

**Định lí C**[11]. Cho $f$ là hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$, $n \geq 2$ là một số nguyên và $a \in C_p$ - $\{0\}$. Khi đó nếu $f^n(z)\,f'(z) \neq a$ với mọi $z \in \mathbb{C}_p$ thì $f$ là hằng.

Năm 2011, Hà Huy Khoái và Vũ Hoài An đã thiết lập các kết quả tương tự cho đơn thức vi phân dạng $f^n(z)\left(f^{(k)}(z)\right)^m$. Họ đã nhận được kết quả sau:

**Định lí D**[4]. Cho $f$ là hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$, thỏa mãn điều kiện $f^n(z)\,(f^{(k)})^m(z) \neq 1$ với mọi $z \in \mathbb{C}_p$ và n,m k là các số nguyên không

âm.Khi đó $f$ là đa thức bậc $< k$ nếu một trong các điều kiện sau xảy ra:
1. $f$ là một hàm nguyên.
2. $k > 0$ và hoặc $m = 1, n > \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$ hoặc $m > 1, n \geq 1$.
3.$n \geq 0, m > 0, k > 0$, và tồn tại hằng số C, $r_0$ sao cho $|f|_r < C$ với mọi $r > r_0$.
Theo hướng nghiên cứu này, đề tài nhằm nghiên cứu vấn đề:
**Phân bố giá trị đối với đơn thức vi phân của hàm phân hình $p$-adic.**
Đây là một vấn đề có tính thời sự của giải tích $p$-adic.
Phương pháp được dùng ở đây là :
Vận dụng các kiểu của Định lý chính thứ hai trong trường $p$-adic để xét phân bố giá trị đối với đơn thức vi phân của hàm phân hình $p$-adic.
Ngoài phần mở đầu và tài liệu tham khảo luận văn gồm:
*Chương 1*. Phân bố giá trị của hàm phân hình $p$-adic.
*Chương 2*. Phân bố giá trị đối với đơn thức vi phân của hàm phân hình $p$-adic.
Luận văn được hoàn thành tại Khoa Sau Đại Học, Đại Học Sư Phạm Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của Tiến Sĩ Vũ Hoài An. Nhân dịp này, tôi xin cảm ơn Tiến Sĩ Vũ Hoài An, người đã hướng dẫn giúp đỡ tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến các nhà toán học Khoa Toán, Đại Học Sư phạm - Đại Học Thái Nguyên.
Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2014

Tác giả

Nguyễn Thị Bích Thùy

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

# Chương 1

# Phân bố giá trị của hàm phân hình $p$ - adic

Hiện nay tập bài giảng nhập môn Giải tích $p$-adic [2] của Hà Trần Phương là tài liệu tiếng Việt được dùng cho cao học ngành giải tích của Trường Đại Học Sư Phạm - Đại Học Thái Nguyên. Sách chuyên khảo về hàm phân hình không Acsimet của Hu-Yang [9] là tài liệu tham khảo tiếng Anh rất tốt cho cao học, nghiên cứu sinh và những người muốn tìm hiểu về lý thuyết phân bố giá trị $p$-adic. Trên cơ sở các tài liệu này, trong chương 1 chúng tôi trình bày một số kiến thức về phân bố giá trị của hàm phân hình $p$-adic để dùng cho chương 2.

## 1.1 Hàm đặc trưng của hàm phân hình $p$-adic

### 1.1.1 Không gian $\mathbb{C}_p$

Với $p$ là một số nguyên tố cố định, Ostowski đã khẳng định: Chỉ có hai cách trang bị chuẩn không tầm thường cho trường hữu tỉ $\mathbb{Q}$. Mở rộng theo chuẩn thông thường ta có trường số thực $\mathbb{R}$, mở rộng theo chuẩn $p$-adic ta có trường số $\mathbb{Q}_p$.

Kí hiệu $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{Q}}_p$ là bổ sung của bao đóng đại số của $\mathbb{Q}_p$. Ta gọi $\mathbb{C}_p$ là trường số phức $p$-adic.

Chuẩn trên $\mathbb{C}_p$ được mở rộng tự nhiên của chuẩn $p$-adic trên $\mathbb{Q}_p$.

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Kí hiệu:

$D_r = \{z \in \mathbb{C}_p : |z| \leq r\}$, $D_{<r>} = \{z \in \mathbb{C}_p : |z| = r\}$.

Giả sử $f(z)$ là hàm chỉnh hình trên $D_r$ được biểu diễn bởi $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.

Do $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |a_n|\,|z^n| = 0$ nên tồn tại $n \in \mathbb{N}^*$ để $|a_n|\,|z^n|$ đạt giá trị lớn nhất.

Khi đó ta đặt: $|f|_r = \max\limits_{n\geq 0} \{|a_n|\,|z^n|\}$.

Trong suốt luận văn ta quy ước log là $\log_p$.

### 1.1.2 Hàm đặc trưng

Giả sử $f$ là một một hàm chỉnh hình khác hằng trên $\mathbb{C}_p$ . Với mỗi $a \in \mathbb{C}_p$, $f$ viết $f = \sum P_i\,(z-a)$ với $P_i$ các đa thức bậc $i$.

Định nghĩa $v_f(a) = \min\{i : P_i \neq 0\}$.

Cho $d \in \mathbb{C}_p$, Định nghĩa một hàm $v_f^d : \in \mathbb{C}_p \longrightarrow N$ xác định bởi

$$v_f^d\,(a) = v_{f-d}\,(a).$$

Cố định số thực $\rho_0$ với $0 < \rho_0 \leq r$. Định nghĩa $N_f\,(a,r) = \frac{1}{lnp} \int_{\rho_0}^{r} \frac{n_f(a,x)}{x} dx$ ở đó $n_f(a,x)$ là số nghiệm của phương trình $f(z) = a$ tính cả bội trên đĩa $|z| \leq x$.

Nếu $a = 0$ thì đặt $N_f(r) = N_f(0,r)$. Cho $l$ là một số nguyên dương. Đặt $N_{l,f}\,(a,r) = \frac{1}{lnp}\, int_{\rho_0}^{r} \frac{n_{l,f}(a,x)}{x} dx$, $n_{l,f}(a,x) = \sum\limits_{|z|\leq r} \min\{v_{f-a}(z), l\}$

Cho $k$ là một số nguyên dương, Ta định nghĩa hàm $v_f^{\leq k}$ từ $\mathbb{C}_p$ vào $\mathbb{N}$ xác định bởi:

$$v_f^{\leq k}(z) = \begin{cases} 0 \quad \text{nếu} \quad v_f(z) > k \\ v_f(z) \quad \text{nếu} \quad v_f(z) \leq k \end{cases}$$

và

$$n_f^{\leq k}(r) = \sum_{|z|\leq r} v_f^{\leq k}(z),\ n_f^{\leq k}(a,r) = n_{f-a}^{\leq k}(r).$$

Định nghĩa $N_f^{\leq k}(a,r) = \dfrac{1}{lnp} \displaystyle\int_{\rho_0}^{r} \frac{n_f^{\leq k}(a,x)}{x} dx$.

Nếu $a = 0$ thì đặt $N_f^{\leq k}(r) = N_f^{\leq k}(0,r)$.