ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

**NGUYỄN THỊ HƯỜNG**

# DƯỚI THÁC TRIỂN CỦA HÀM ĐA ĐIỀU HÒA DƯỚI VỚI KỲ DỊ YẾU

**LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2014**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

**NGUYỄN THỊ HƯỜNG**

# DƯỚI THÁC TRIỂN CỦA HÀM ĐA ĐIỀU HÒA DƯỚI VỚI KỲ DỊ YẾU

**Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH**
**Mã số: 60.46.01.02**

## LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

**Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. PHẠM HIẾN BẰNG**

**THÁI NGUYÊN - 2014**

## LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan bản luận văn này là công trình nghiên cứu độc lập của riêng tôi. Các số liệu, kết quả trong luận văn là trung thực và chính xác.

Tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm về lời cam đoan của mình.

*Thái Nguyên, tháng 04 năm 2014*

**Tác giả**

**Nguyễn Thị Hường**



Số hóa bởi Trung tâm Học liệu –ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

# MỤC LỤC





Số hóa bởi Trung tâm Học liệu –ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

## MỞ ĐẦU

### 1. Lý do chọn đề tài

Cho $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một miền siêu lồi. Ký hiệu $\mathcal{E}_0(\Omega)$ là lớp các hàm đa điều hoà dưới âm $\varphi$ trên $\Omega$ với giá trị biên 0 và độ đo Monge-Ampere hữu hạn trên $\Omega$. Ký hiệu $\mathcal{F}(\Omega)$ là lớp các hàm đa điều hoà dưới âm $\varphi$ trên $\Omega$ sao cho tồn tại dãy giảm $(\varphi_j)_j$ các hàm đa điều hoà dưới trong $\mathcal{E}_0(\Omega)$ hội tụ đến $\varphi$ thỏa mãn $\sup_j \int_\Omega (dd^c\varphi_j)^n < +\infty$. Ta biết rằng toán tử Monge-Ampere là xác định tốt trên lớp $\mathcal{F}(\Omega)$ và với hàm $\varphi \in \mathcal{F}(\Omega)$ kết hợp với độ đo Borel dương nó là độ đo Monge-Ampere bị chặn trên $\Omega$. Nếu $\Omega$ và $\tilde{\Omega}$ là các miền siêu lồi với $\Omega \subset \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}^n$ và $\varphi \in \mathcal{F}(\Omega)$ thì có thể chỉ ra rằng tồn tại một hàm đa điều hòa dưới $\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}(\tilde{\Omega})$ sao cho $\tilde{\varphi} \le \varphi$ trên $\Omega$ và $\int_{\tilde{\Omega}} (dd^c\tilde{\varphi})^n \le \int_\Omega (dd^c\varphi)^n$. Hàm như thế được gọi là dưới thác triển của $\varphi$ tới $\tilde{\Omega}$.

E.Bedford và D.Burns và sau đó là U.Cegrell, năm 1978, đã chứng minh rằng một vài miền trơn bị chặn thỏa mãn điều kiện biên đã biết là một miền tồn tại của một hàm đa điều hòa dưới.

El Mir, năm 1980, đã cho một ví dụ về một hàm đa điều hòa dưới trên song đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}^2$ mà hạn chế lên một song đĩa bé hơn không có dưới thác triển lên toàn bộ không gian. Tác giả cũng chứng minh rằng, sau khi làm yếu đi tính kỳ dị của hàm đa điều hòa dưới đã cho bằng sự hợp thành với hàm lồi tăng thích hợp, có thể đạt được dưới thác triển toàn cục.

Sau đó Alexander và Taylor vào năm 1984 đã tổng quát hóa kết quả này với chứng minh đơn giản và hiệu quả hơn.


Số hóa bởi Trung tâm Học liệu –ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

E.Bedford và B.A.Taylor, năm 1988, đã chứng minh rằng một miền bị chặn trơn tuỳ ý trong $C^n$ là miền tồn tại của hàm đa điều hòa dưới trơn.

Gần đây, các tác giả Cegrell và Zeriahi đã chứng minh rằng hàm đa điều hòa dưới với độ đo Monge - Ampere bị chặn đều trên một miền siêu lồi bị chặn luôn có dưới thác triển đa điều hòa dưới đến một miền siêu lồi lớn hơn.

Ở đây chúng tôi muốn chứng minh một vài kết quả chỉ ra rằng hàm đa điều hòa dưới với độ đo Monge - Ampere trên một miền siêu lồi bị chặn luôn có dưới thác triển đa điều hòa dưới toàn cục với cấp tăng lôga ở vô cùng. Vì thế chúng tôi chọn đề tài **"*Dưới thác triển của hàm đa điều hoà dưới với kỳ dị yếu*".**

Đề tài có tính thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

**2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu**

***2.1. Mục đích nghiên cứu***

Mục đích chính của luận văn là trình bày một số kết quả trong việc nghiên cứu về dưới thác triển của hàm đa điều hoà dưới với kỳ dị yếu.

***2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu***

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

+ Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, toán tử Monge-Ampère.

+ Trình bày một số kết quả về dưới thác triển của hàm đa điều hoà dưới với kỳ dị yếu.

**3. Phương pháp nghiên cứu**

- Sử dụng các phương pháp của giải tích phức kết hợp với các phương pháp của giải tích hàm hiện đại, các phương pháp của lý thuyết thế vị phức.

- Trình bày lại các kết quả của U.cegrell, S.kolodziej và A.zeriahi

**4. Bố cục của luận văn**

Nội dung luận văn gồm 44 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất của hàm đa điều hoà dưới, toán tử Monge-Ampère.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn, trình bày các kết quả nghiên cứu về dưới thác triển của hàm đa điều hoà dưới với kỳ dị yếu.

Trong mục 2.1, nhắc lại định nghĩa cơ bản liên quan đến lớp Cegrell $\mathcal{E}(\Omega)$ các hàm đa điều hòa dưới với độ đo Monge - Ampere bị chặn đều địa phương trên miền siêu lồi $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Từ đó cho đặc trưng theo ngôn ngữ dung lượng của hàm trong lớp $\mathcal{E}(\Omega)$.

Trong mục 2.2, trình bày các ước lượng về cỡ của tập mức con của các hàm đa điều hòa dưới trong lớp con khác nhau của lớp $\mathcal{E}(\Omega)$.

Trong mục 2.3 trình bày các kết quả về dưới thác triển của hàm đa điều hoà dưới với độ đo bị chặn.

Trong mục 2.4, sử dụng kết quả trong phần 2.2 để tổng quát hóa định lý dưới thác triển của Alexander - Taylor, từ đó suy ra rằng hàm đa điều hòa dưới có năng lượng hữu hạn theo nghĩa của Cegrell sẽ có dưới thác triển toàn cục với cấp tăng lôgarit kiểu logarit bé tùy ý.

Phần cuối cùng của chương này, trong mục 2.5, sử dụng kết quả gần đây từ lý thuyết của phương trình Monge - Ampere trên đa tạp Kahler compact nhờ tác giả Kolodziej, chứng minh hai kết quả về dưới thác triển toàn cục của hàm đa điều hòa dưới có độ đo bị chặn đều trên miền siêu lồi nhờ hàm đa điều hòa dưới với cấp tăng logarit trên $\mathbb{C}^n$ với độ đo Monge - Ampere toàn cục được xác định tốt trong một vài trường hợp.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS. TS Phạm Hiến Bằng. Nhân



Số hóa bởi Trung tâm Học liệu –ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến PGS. TS Phạm Hiến Bằng về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Trường THPT Trần Phú, tỉnh Thái Nguyên cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết, vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.


Số hóa bởi Trung tâm Học liệu –ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

## Chương 1
## CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

### 1.1. Hàm đa điều hoà dưới

#### *1.1.1. Định nghĩa*

*Cho* $\Omega$ *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$ *và* $u:\Omega\to[-\infty,\infty)$ *là một hàm nửa liên tục trên và không trùng với* $-\infty$ *trên bất kỳ thành phần liên thông nào của* $\Omega$*. Hàm* $u$ *được gọi là đa điều hoà dưới nếu với mỗi* $a\in\Omega$ *và* $b\in\mathbb{C}^n$*, hàm* $\lambda\mapsto u(a+\lambda b)$ *là điều hoà dưới hoặc trùng* $-\infty$ *trên mỗi thành phần của tập hợp* $\{\lambda\in\mathbb{C}: a+\lambda b\in\Omega\}$*. Trong trường hợp này, ta viết* $u\in PSH(\Omega)$*. ( ở đây kí hiệu* $PSH(\Omega)$ *là lớp hàm đa điều hoà dưới trong* $\Omega$*).*

Sau đây là một vài tính chất của hàm đa điều hoà dưới:

#### *1.1.2. Mệnh đề*

*Nếu* $u,v\in PSH(\Omega)$ *và* $u=v$ *hầu khắp nơi trong* $\Omega$*, thì* $u\equiv v$.

#### *1.1.3. Định lý*

*Cho* $\Omega$ *là một tập con mở trong* $\mathbb{C}^n$*. Khi đó*

(i) *Họ* $PSH(\Omega)$ *là nón lồi, tức là nếu* $a,b$ *là các số không âm và* $u,v\in PSH(\Omega)$*, thì* $au+bv\in PSH(\Omega)$.

(ii) *Nếu* $\Omega$ *là liên thông và* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset PSH(\Omega)$ *là dãy giảm, thì* $u=\lim_{j\to\infty}u_j\in PSH(\Omega)$ *hoặc* $u\equiv-\infty$.

(iii) *Nếu* $u:\Omega\to\mathbb{R}$*, và nếu* $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset PSH(\Omega)$ *hội tụ đều tới* $u$ *trên các tập con compact của* $\Omega$*, thì* $u\in PSH(\Omega)$.

(iv) *Giả sử* $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset PSH(\Omega)$ *sao cho bao trên của nó* $u=\sup_{\alpha\in A}u_\alpha$ *là bị chặn trên địa phương. Khi đó hàm chính qui nửa liên tục trên* $u^*$ *là đa điều* *hoà dưới trong* $\Omega$.

**1.1.4. *Hệ quả***

*Cho* $\Omega$ *là một tập mở trong* $\mathbb{C}^n$ *và* $\omega$ *là một tập con mở thực sự khác rỗng của* $\Omega$. *Nếu* $u \in PSH(\Omega)$, $v \in PSH(\omega)$, *và* $\lim\limits_{x \to y} v(x) \le u(y)$ *với mỗi* $y \in \partial\omega \cap \Omega$, *thì công thức*

$$w = \begin{cases} \max\{u, v\} & \text{trong } \omega \\ u & \text{trong } \Omega \setminus \omega \end{cases}$$

*xác định một hàm đa điều hoà dưới trong* $\Omega$.

**1.1.5. *Định lý***

*Cho* $\Omega$ *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$.

$(i)$ *Cho* $u, v$ *là các hàm đa điều hoà trong* $\Omega$ *và* $v > 0$. *Nếu* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là lồi, thì* $vf(u/v)$ *là đa điều hoà dưới trong* $\Omega$.

$(ii)$ *Cho* $u \in PSH(\Omega)$, $v \in PSH(\Omega)$, *và* $v > 0$ *trong* $\Omega$. *Nếu* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *là lồi và tăng dần, thì* $vf(u/v)$ *là đa điều hoà dưới trong* $\Omega$.

$(iii)$ *Cho* $u, -v \in PSH(\Omega)$, $u \ge 0$ *trong* $\Omega$, *và* $v > 0$ *trong* $\Omega$. *Nếu* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *là lồi và* $f(0) = 0$, *thì* $vf(u/v) \in PSH(\Omega)$.

**1.1.6. *Định lý***

*Cho* $\Omega$ *là một tập con mở của* $\mathbb{C}^n$ *và*

$$F = \{z \in \Omega : v(z) = -\infty\}$$

*là một tập con đóng của* $\Omega$, *ở đây* $v \in PSH(\Omega)$. *Nếu* $u \in PSH(\Omega \setminus F)$ *là bị chặn trên, thì hàm* $\bar{u}$ *xác định bởi*

$$\bar{u}(z) = \begin{cases} u(z) & (z \in \Omega \setminus F) \\ \limsup\limits_{\substack{y \to z \\ y \notin F}} u(y) & (z \in F) \end{cases}$$