ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THỊ NGỌC HÀ

HÀM ELLIPTIC

Chuyên ngành : Toán giải tích
Mã số : 60.46.01.02

Người hướng dẫn khoa hoc: **GS.TSKH HÀ HUY KHOÁI**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2014

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn này đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái nguyên, Tháng 5, năm 2014

Người viết Luận văn

Phạm Thị Ngọc Hà

LỜI CẢM ƠN

Để hoàn thành được luận văn một các hoàn chỉnh. Tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của GS.TSKH Hà Huy Khoái (Viện Toán Hà Nội). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo phòng Sau Đại học, quý thầy cô giảng dạy lớp cao học K20 (2012 – 2014) Trường Đại học Sư Phạm – Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu, cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2014

Phạm Thị Ngọc Hà

MỤC LỤC

Lời cam doan .... **i**

Lời cảm ơn .... **ii**

Mục lục .... **iii**

MỞ ĐẦU **1**

Chương 1 : ÁNH XẠ BẢO GIÁC **1**

1.1. Ý nghĩa hình học của argument đạo hàm 2

1.2. Ý nghĩa hình học của môđun đạo hàm 4

1.3. Định nghĩa 5

1.4. Ánh xạ thực hiện bởi hàm lũy thừa 5

1.5. Ánh xạ thực hiện bởi hàm mũ 8

1.6. Ánh xạ hình chữ nhật 15

1.7. Hàm có chu kỳ kép 17

1.8. Các cặp chu kỳ cơ bản 18

1.8.1 Định nghĩa 18

1.8.2. Một số định lý 19

Chương 2: CÁC HÀM ELLIPTIC **21**

2.1. Định nghĩa và định lý 21

2.2. Xây dựng hàm Elliptic 24

2.2.1. Hàm Elliptic Weierstrass 24

2.2.2. Phương trình vi phân thỏa mãn bởi hàm p. 29

2.2.3. Biểu diễn hàm Elliptic qua hàm Weierstrass .... .30

2.3 Quan hệ đại số của các hàm elliptic 32

2.4. Một số ứng dụng của hàm Elipptic 32

2.4.1. Khai triển Laurend của hàm $p(z)$ tại lân cận điểm 0 32

2.4.2. Dạng môđula 33

2.4.2.1. Nhón môđula 33

2.4.2.2. Miền cơ bản 34

2.4.2.3 Hàm môđula 34

2.4.3 Ứng dụng….. .35
Kết luận chung 37
TÀI LIỆU THAM KHẢO 38

MỞ ĐẦU

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong lý thuyết hàm biến số thực, các hàm lượng giác *sinx, cosx* đóng vai trò hết sức quan trọng. Nguyên nhân chủ yếu là vì hàm *sinx, cosx* là các hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π nên được xác định duy nhất khi biết giá trị của nó trên một đoạn độ dài 2π. Đối với các hàm biến phức, *sinx, cosx* vẫn có chu kì 2π. Nhưng trên mặt phẳng phức lại không có tính chất đó. Do đó nếu muốn tìm những hàm có vai trò trong lý thuyết hàm biến phức tương tự như các hàm lượng giác trong lý thuyết hàm biến thực, ta cần tìm nhưng hàm mà khi biết giá trị của chúng trên một hình bình hành, ta xác định được hàm trên mặt phẳng phức. Để ý rằng, mặt phẳng phức có thể phủ kín bởi một số đếm được hình bình hành bằng nhau.Ý tưởng đó dẫn đến việc xét lớp hàm elliptic, mà vai trò của chúng trong lý thuyết hàm biến phức quan trọng không kém vai trò của các hàm lượng giác trong lý thuyết hàm biến thực. Lý thuyết các hàm elliptic có ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau của toán học,cả lý thuyết và ứng dụng.

Từ lý do trên tôi chọn đề tài nghiên cứu của luận văn :

“ *Hàm ELLIPTIC* ”

II. MỤC ĐÍCH CỦA ĐỀ TÀI

2.1. Trình bày một số kiến thức cơ sở của lý thuyết các hàm Elliptic.

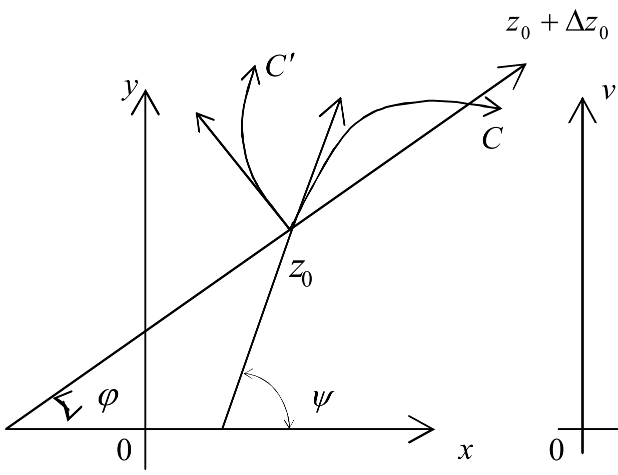
2.2. Một số ứng dụng của các hàm Elliptic.

Chương 1

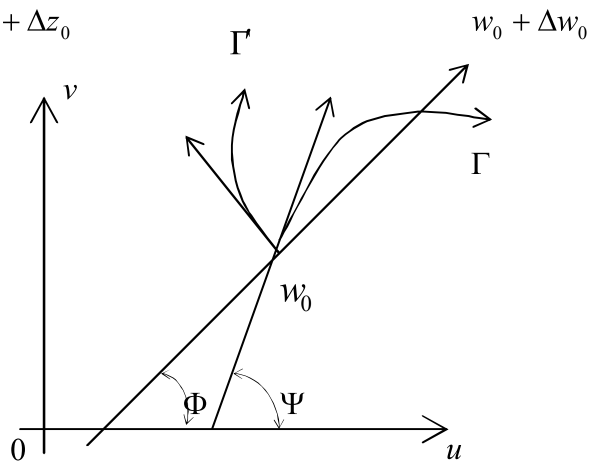
ÁNH XẠ BẢO GIÁC

1.1. Ý nghĩa hình học của argument đạo hàm.

Giả sử $w = f(z)$ là hàm số giải tích trên miền G. Ta sẽ biểu diễn giá trị của hàm số $w = u + iv$ bởi điểm trên mặt phẳng w. Mỗi điểm $z = x + iy$ trên mặt phẳng của biến số độc lập z sẽ tương ứng với một điểm $w = u + iv$ trên mặt phẳng w. Khi điểm z chuyển động trên mặt phẳng z theo một đường cong C nào đó thì điểm tương ứng w nó sẽ chạy trên đường cong Γ trong mặt phẳng w, là ảnh của đường cong C.



Hình 1



Hình 2

Gọi z là điểm bất kỳ trên miền G và C là đường cong cho trước có hướng xác định. C đi qua z_0 và có tiếp tuyến xác định tại z_0. Giả sử $f'(z_0) \neq 0$.

Trên mặt phẳng w, ảnh của C là Γ đi qua điểm $w_0 = f(z_0)$. Nếu phương trình của C là $z = z(t)$ ($0 \le t \le 1$) thì phư ơng trình của Γ sẽ là:

$$w = f(z) = f[z(t)] = \quad (t) \ (0 \le t \le 1).$$

Để giải thích ý nghĩa hình học của đạo hàm $f'(z_0)$, ta sẽ biểu diễn số phức $f'(z_0)$ ở dạng lượng giác $f'(z_0) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ và nêu ý nghĩa hình học của argument α và môđun r của đạo hàm.

Lấy điểm bất kỳ $z_0 + \Delta z_0$ trên đường cong C và ký hiệu $w_0 + \Delta w_0$ là điểm tương ứng với nó trên mặt phẳng w thuộc đường cong Γ. Khi điểm $z_0 + \Delta z_0$ tiến về điểm z_0 trên đường cong C thì điểm tương ứng $w_0 + \Delta w_0$ sẽ tiến về điểm w_0 trên đường cong Γ, trong đó $\Delta z_0, \Delta w_0$ cùng tiến về 0.

Từ đẳng thức $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z_0 \to 0} \dfrac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Ta có:

$$\lim_{\Delta z_0 \to 0} \left| \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} \right| = r \,. \qquad (1.1.a)$$

$$\lim_{\Delta z_0 \to 0} \left(\arg \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} \right) = \alpha \,. \qquad (1.1.b)$$

(với $f'(z_0) \neq o$).

Xét đẳng thức (1.2), ta có:

$$\lim_{\Delta z_0 \to 0} \arg \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = \lim_{\Delta z_0 \to 0} \arg \Delta w_0 - \lim_{\Delta z_0 \to 0} \arg \Delta z_0 = \alpha \,. \qquad (1.1.c)$$

Ta giải thích ý nghĩa hình học của (1.1.c) sử dụng các hình 1 và hình 2. Rõ ràng, $\Delta z_0 = (z_0 + \Delta z_0) - z_0$ được biểu diễn bởi vectơ nối điểm z_0 với điểm $z_0 + \Delta z_0$, còn Δw_0 là vectơ nối từ điểm w_0 đến điểm $w_0 + \Delta w_0$. Suy ra $\arg \Delta z_0$ là góc φ nằm giữa hướng dương của trục Ox và vectơ Δz_0 tương ứng, còn $\arg \Delta w_0$ là góc ϕ giữa trục Ou và vectơ Δw_0. Vậy (1.1.c) sẽ có dạng:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \phi - \lim_{\Delta z_0 \to 0} \varphi = \alpha \,. \qquad (1.1.d)$$

Ở vị thí giới hạn hướng của vectơ Δz_0 sẽ trùng với hướng của tiếp tuyến với Γ tại điểm w_0(hình 1), tiếp tuyến này tồn tại theo đẳng thức (1.1.c). Ký hiệu ψ và Ψ là các góc của trục Ox và Ou với các tiếp tuyến tương ứng của C và Γ tại z_0 và w_0. Ta có thể viết (1.1.d) dưới dạng:

$$\Psi - \psi = \alpha \text{ hay } \Psi = \psi + \alpha \,. \qquad (1.1.e)$$

Ta quy ước hướng dương của trục Ox và Ou trùng nhau. Khi đó, từ (1.1.e) ta có α là góc tiếp tuyến với C tại điểm z_0 đã quay trong ánh xạ $w = f(z)$. Nói một cách khác, α là góc giữa hướng ban đầu với hướng sau ánh xạ. Để ý rằng đường cong C được chọn tùy ý, khi hướng của C thay đổi thì ψ và Ψ đều thay đổi nhưng góc α không đổi. Do đó, nếu tại z_0 ta có đường cong C' khác và gọi đường cong tương ứng với nó tại w_0 là Γ' thi (1.1.e) có dạng :

$$\Psi' = \psi' + \alpha \qquad (1.1.f)$$

Trong đó ψ', Ψ' là các giá trị tương ứng đối với C' và Γ'. Từ (1.1.e) và (1.1.f) ta có: $\Psi' - \Psi = \psi' - \psi$ (1.1.g)

Để ý rằng góc $\psi' - \psi$ là góc giữa các tiếp tuyến tại điểm z_0 với các đường cong C và C' còn $\Psi' - \Psi$ là góc tương ứng với Γ và Γ'. Từ (1.1.g) ta có hai đường cong bất kỳ xuất phát từ z_0 ánh xạ tương ứng vào hai đường đi qua điểm $w_0 = f(z_0)$ sao cho góc giữa hai tiếp tuyến của hai đường cong ban đầu và góc giữa hai tiếp tuyến của đường cong ảnh bằng nhau cả về độ lớn và hướng. Điều đó có nghĩa là nếu hướng dương của đường cong C tại điểm z_0 quay một góc α có hướng xác định đến hướng dương của đường cong C', thì hướng tương ứng của đường cong Γ cũng quay một góc α đến hướng của Γ' với cùng hướng đó.

Vậy ánh xạ bởi hàm giải tích có tính chất bảo toàn góc giữa tất cả các điểm mà tại đó $f'(z) \neq 0$.

1.2. Ý nghĩa hình học của môđun đạo hàm.

Xét đẳng thức (1.1.a) ta có: $|f'(z_0)| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left| \dfrac{\Delta w_0}{\Delta z_0} \right| = r$. (1.2.a)

Về mặt hình học $|\Delta z_0|$ là độ dài vectơ Δz_0, tức là khoảng cách giữa z_0 và $z_0 + \Delta z_0$. Tương tự, $|\Delta w_0|$ là khoảng cách giữa các điểm w_0 và $w_0 + \Delta w_0$ tương ứng. Đẳng thức (1.2.a) chỉ ra rằng tỷ số giữa khoảng cách vô cùng bé giữa các điểm ban đầu khi lấy giới hạn sẽ là $r = |f'(z_0)|$ không phụ thuộc vào hướng của C. Do đó có thể xem $r = |f'(z_0)|$ là đại lượng đo tỷ lệ tại điểm z_0 trong ánh xạ bởi hàm số $w = f(z)$. Nếu $r > 1$ thì tỷ lệ tăng, nghĩa là có sự co giãn của phần tử vô cùng bé tại z_0. Nếu $r < 1$ thì ngược lại có sự co; nếu $r = 1$ thì tỷ lệ này không đổi, nghĩa là phần tử vô cùng bé tại z_0 được thay thế bởi phần tử vô cùng bé tương đương với nó tại điểm w_0.

Vì $r = |f'(z_0)|$ chỉ phụ thuộc vào z_0 mà không phụ thuộc vào hướng của C nên tỷ lệ này thường được gọi là sự biến dạng tại điểm z_0 và nó sẽ không phụ thuộc vào hướng. Vậy có thể nói rằng ánh xạ bởi hàm số giải tích $w = f(z)$ có độ co giãn không phụ thuộc vào hướng tại mọi điểm z_0 sao cho $f'(z_0) \neq 0$.

1.3. Định nghĩa.

- **Định nghĩa**

Cho $w = f(z)$ là hàm phức định nghĩa trên miền D. Cho z_0 là một điểm của miền D. $f(z)$ được gọi là ánh xạ bảo giác tại điểm z_0 nếu góc của hai đường cong định hướng C và C' qua z_0 bằng góc của ảnh của hai đường cong đó và hướng của góc không thay đổi.

Ánh xạ $w = f(z)$ được gọi là ánh xạ bảo giác trên miền D nếu $f(z)$ bảo giác tại mọi điểm thuộc miền D.

Ánh xạ bảo giác là ánh xạ bảo toàn góc giữa hai đường cong trơn tùy ý theo đúng hướng quay của góc.

1.4. Ánh xạ thực hiện bởi hàm lũy thừa.

- **Hàm lũy thừa và căn.**

Xét hàm số:

$$w = z^n.$$

Trong đó n là số tự nhiên lớn hơn 1 và hàm ngược của nó:

$$z = \sqrt[n]{w}.$$