ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VƯƠNG THỊ HUỆ CHI

BÀI TOÁN BÙ TUYẾN TÍNH VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2014

Mục lục

Lời nói đầu

Bài toán bù tuyến tính (Linear Complementarity Problem, viết tắt là LCP), do R. W. Cottle và G. B. Dantzig đề xuất năm 1968, là bài toán tổng quát mô tả thống nhất các bài toán qui hoạch tuyến tính, qui hoạch toàn phương và trò chơi song ma trận. Các nghiên cứu về bài toán bù tuyến tính đã đem lại nhiều lợi ích, vượt ra ngoài khuôn khổ bài toán bù. Chẳng hạn, *thuật toán xoay bù* (comple-mentarity pivot algorithm) lúc đầu được đề xuất cho bài toán bù tuyến tính đã được mở rộng trực tiếp để tạo ra các thuật toán hiệu quả tính điểm bất động Brouwer và Kakutani, tính các trạng thái cân bằng kinh tế, giải các hệ phương trình phi tuyến và tìm nghiệm tối ưu cho các bài toán qui hoạch phi tuyến.

Bài toán bù tuyến tính là bài toán tìm véctơ $z \in \mathbb{R}^n$ nghiệm đúng hệ

$$z \geq 0, q + Mz \geq 0, z^T(q + Mz) = 0$$

hoặc chỉ rõ hệ trên vô nghiệm, với véctơ $q \in \mathbb{R}^n$ và ma trận $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ cho trước. Ký hiệu bài toán này là LCP (q, M) hay đơn giản là LCP nếu không cần chỉ rõ q và M (^{T} là ký hiệu chuyển vị vectơ hay ma trận).

Bài toán bù tuyến tính LCP (q, M) có nhiều ứng dụng trong lý thuyết và thực tiễn, như trong qui hoạch toàn phương, trò chơi song ma trận, cân bằng thị trường và trong nhiều bài toán kinh tế, công nghiệp và vật lý khác.

Mục tiêu của luận văn này là tìm hiểu và trình bày khái quát về bài toán bù tuyến tính, mối quan hệ giữa bài toán bù tuyến tính với bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán qui hoạch toán học với ràng buộc cân bằng. Tìm hiểu các phương pháp giải chính và một số ứng dụng của bài toán bù tuyến tính vào mô hình trò chơi.

Luận văn được viết thành ba chương.

Chương 1 “Bài toán bù tuyến tính" trình bày các khái niệm cơ bản về bài toán bù tuyến tính, nguồn gốc bài toán và sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán. Bài toán bù có nhiều ứng dụng và liên quan chặt chẽ với một số bài toán dạng tổng quát hơn, hiện đang rất được quan tâm nghiên cứu, đó là bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán qui hoạch toán học với ràng buộc cân bằng. Vì thế trong chương cũng sẽ đề cập tới hai bài toán này.

Chương 2 “Phương pháp giải bài toán bù tuyến tính” giới thiệu hai phương pháp tiêu biểu giải bài toán bù tuyến tính: phương pháp Lemke (1968) và phương pháp điểm trong (Kojima, 1988). Phương pháp Lemke có nhiều điểm giống với phương pháp đơn hình trong qui hoạch tuyến tính, nhưng khác ở cách chọn biến để đưa vào cơ sở, phương pháp này cho phép giải bài toán bù tuyến tính không suy biến sau một số hữu hạn bước. Tuy vậy, trong trường hợp xấu nhất thời gian chạy của nó là một hàm mũ. Phương pháp điểm trong dựa trên ý tưởng các thuật toán điểm trong giải qui hoạch tuyến tính, cho phép giải bài toán bù tuyến tính với ma trận M nửa xác định dương trong thời gian đa thức.

Chương 3 "Một số ứng dụng của bài toán bù tuyến tính" trình bày hai mô hình trò chơi thường gặp trong các ứng dụng của bài toán bù tuyến tính: trò chơi Stackelberg và trò chơi song ma trận. Trò chơi Stackelberg liên quan chặt chẽ với bài toán qui hoạch toán học với ràng buộc cân bằng (MPEC) và là sự mở rộng ý tưởng của trò chơi Nash. Có thể tìm nghiệm cân bằng Nash của trò chơi song ma trận nhờ lập và giải một bài toán bù tuyến tính thích hợp.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên chắc chắn luận văn này còn có những thiếu sót nhất định, kính mong quí thầy cô và các bạn đóng góp ý kiến để tác giả tiếp tục hoàn thiện luận văn sau này.

Nhân dịp này tác giả luận văn xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS. TS. Trần Vũ Thiệu đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm Luận văn. Tác giả trân trọng cảm ơn các giảng viên Trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học – Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 3 năm 2014

Tác giả

Vương Thị Huệ Chi

Chương 1
Bài toán bù tuyến tính

Chương này trình bày các khái niệm cơ bản về bài toán bù tuyến tính, nguồn gốc bài toán và sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán. Bài toán bù có nhiều ứng dụng và liên quan chặt chẽ với một số bài toán dạng tổng quát hơn, hiện đang rất được quan tâm nghiên cứu, đó là bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán qui hoạch toán học với ràng buộc cân bằng, vì thế trong chương sẽ giới thiệu về hai bài toán này. Nội dung của chương được tham khảo từ các tài liệu [3], [4], [6] và [7].

1.1. Bài toán bù tuyến tính (LCP)

1.1.1. Mô tả bài toán

Bài toán bù tuyến tính (Linear Complementarity Problem, viết tắt LCP) là bài toán tìm một véctơ trong không gian véctơ thực hữu hạn chiều thỏa mãn một hệ bất đẳng thức nào đó. Cụ thể, bài toán bù tuyến tính được phát biểu như sau.

Định nghĩa 1.1.([3], tr.1) Cho véctơ $q \in \mathbb{R}^n$ và ma trận $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, hãy tìm véctơ $z \in \mathbb{R}^n$ sao cho:

$$z \geq 0 \tag{1.1}$$

$$q + Mz \geq 0 \tag{1.2}$$

$$z^T(q + Mz) = 0 \tag{1.3}$$

hoặc chỉ ra véctơ z như thế không tồn tại. Ta ký hiệu bài toán này là LCP (q, M).

Trong các tài liệu về toán, có thể tìm thấy các trường hợp riêng của bài toán bù tuyến tính rất sớm từ những năm 1940, tuy nhiên bài toán bù bắt đầu thu hút sự chú ý chỉ từ giữa những năm 1960, khi bài toán trở thành một chủ đề nghiên cứu riêng.

Sau đây là một số thuật ngữ chính thường dùng trong bài toán bù tuyến tính: Véctơ z thỏa mãn các bất đẳng thức trong (1.1) và (1.2) được gọi là *chấp nhận được*. Nếu véctơ chấp nhận được z thỏa mãn chặt (như bất đẳng thức) các bất đẳng thức trong (1.1) - (1.2) thì nó được gọi là *chấp nhận được chặt*. Bài toán LCP (q, M) gọi là *chấp nhận được* (hay *chấp nhận được chặt*) nếu có tồn tại véctơ chấp nhận được (hay chấp nhận được chặt). Tập tất cả các véctơ chấp nhận được của bài toán LCP (q, M) gọi là *miền chấp nhận được* và ký hiệu là FEA (q, M). Đặt

$$w = q + Mz \tag{1.4}$$

Véctơ chấp nhận được z của LCP (q, M) thỏa mãn (1.3) khi và chỉ khi

$$z_i w_i = 0 \text{ với mọi i = 1, 2, ..., n.} \tag{1.5}$$

Điều kiện (1.5) thường được dùng thay cho điều kiện (1.3). z_i và w_i gọi là một *cặp bù* và chúng được gọi là *bù nhau*. Véctơ z thỏa mãn (1.5) được gọi là các *véctơ bù*. Vì thế, LCP là bài toán tìm véctơ chấp nhận được và bù. Một véctơ như thế gọi là một *nghiệm* (solution) của LCP. Bài toán LCP (q, M) gọi là *giải được* (solvable) nếu nó có nghiệm. Ký hiệu tập nghiệm của LCP (q, M) là SOL (q, M). Chú ý là nếu $q \geq 0$ thì LCP (q, M) luôn giải được với véctơ 0 là *nghiệm tầm thường*.

Cách xác định w như trên thường được dùng để diễn đạt theo cách khác của bài toán LCP (q, M), thuận tiện hơn cho xây dựng các thuật toán giải. Cụ thể là bài toán tìm các véctơ không âm w và z trong $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn (1.4) và (1.5). Để tiện cho trích dẫn về sau, ta viết lại các điều kiện (1.1) - (1.4) của bài toán LCP dưới dạng

$$w \geq 0, z \geq 0,$$

$$w = q + Mz,$$
$$z^T w = 0.$$

Ràng buộc $z^T w = 0$ được gọi là *ràng buộc bù* (Complementarity Constraint) và có thể viết dưới dạng $z \perp$w, trong đó $\perp$ là ký hiệu "vuông góc".

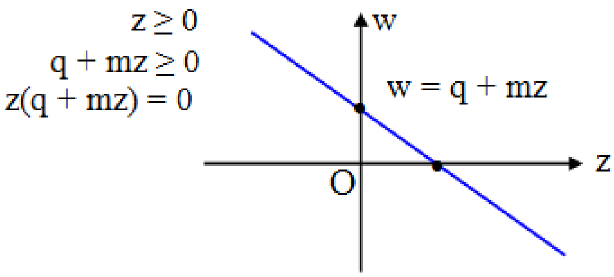
Trường hợp riêng của bài toán LCP (q, M) khi $q = 0$ rất đáng được chú ý. Bài toán này được gọi là *bài toán bù tuyến tính thuần nhất* tương ứng với ma trận M. Một tính chất đặc thù của bài toán LCP $(0, M)$ là nếu $z \in SOL(0, M)$ thì $\lambda z \in SOL(0, M)$ với mọi số thực $\lambda \geq 0$. Bài toán bù tuyến tính thuần nhất có véctơ 0 là nghiệm tầm thường. Câu hỏi "liệu bài toán đặc biệt này có nghiệm khác thường hay không" có ý nghĩa rất quan trọng về lý thuyết và thuật toán.

Ví dụ 1.1(Bài toán một chiều). Cho trước hai số thực $q, m \in \mathbb{R}$, tìm hai biến số $z, w \in \mathbb{R}$ sao cho

$$z \geq 0, w \geq 0, w = q + mz \text{ và } z(q + mz) = 0.$$

Đó là bài toán bù tuyến tính trong $\mathbb{R}$. Hình 1.1 minh họa hình ảnh hình học của bài toán này trong trường hợp $q > 0, m < 0$. Bài toán ở Hình 1.1 có 2 nghiệm:

$$(z = 0, w = q) \text{ và } (z = -\frac{q}{m}, w = 0).$$



Hình 1.1. Bài toán bù tuyến tính trong $\mathbb{R}$

Nói chung, bài toán này có mấy nghiệm? Câu trả lời cho trong bảng sau (tùy thuộc giá trị của q và m).

	$q < 0$	$q = 0$	$q > 0$
$m < 0$	0	1	2
$m = 0$	0	∞	1
$m > 0$	1	1	1

Bảng 1.1. Số nghiệm của LCP trong $\mathbb{R}$

Có thể phát biểu bài toán bù (Complementarity Problem, viết tắt là CP) ở dạng tổng quát hơn như sau.

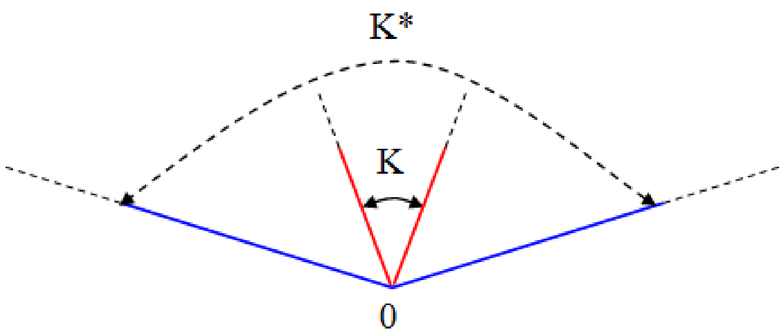
Định nghĩa 1.2. (xem [4], tr. 4-5). Cho nón $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (tức là $x \in K \Rightarrow \lambda x \in K$ với mọi số $\lambda \geq 0$) và hàm $F : K \to \mathbb{R}^n$. Bài toán bù, ký hiệu là CP (K, F), là bài toán tìm một véctơ $z \in \mathbb{R}^n$ thỏa mãn các điều kiện:

$$K \ni z \perp F(z) \in K^*$$

trong đó $\perp$ là ký hiệu "vuông góc" và K^* là *nón đối ngẫu* (dual cone) của K được xác định bởi

$$K^* = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : z^T d \geq 0 \text{ với mọi } z \in K \right\},$$

tức là K^* gồm tất cả các véctơ không tạo thành góc tù với bất kỳ véctơ nào trong K.



Hình 1.2. Nón đối ngẫu K* của nón K

Thay cho ký hiệu $\perp$, ta có thể viết bài toán bù CP (K, F) dưới dạng

$$z \in K, F(z) \in K^* \text{ và } z^T F(z) = 0.$$

Bài toán bù tuyến tính LCP là trường hợp riêng của bài toán bù CP khi $K = \mathbb{R}^n_+$ (do đó $K^* = \mathbb{R}^n_+$) và $F(z) = q + Mz$ với $q \in \mathbb{R}^n$ và $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Luận văn này chủ yếu tập trung xét bài toán bù tuyến tính LCP.

1.1.2. Nguồn gốc bài toán bù tuyến tính

Về lịch sử, bài toán LCP được xem như sự diễn đạt thống nhất của các bài toán qui hoạch tuyến tính, qui hoạch toàn phương và bài toán trò chơi song ma trận. Thực ra, bài toán qui hoạch toàn phương luôn đã và sẽ tiếp tục là nguồn ứng dụng cực kỳ quan trọng của bài toán LCP. Một số thuật toán có hiệu quả cao để giải qui hoạch toàn phương là dựa trên cách diễn đạt của bài toán LCP. Còn về bài toán trò chơi song ma trận, bài toán LCP đã là phương tiện để khám phá ra một công cụ hiệu quả, có tính chất kiến thiết, để tính toán nghiệm cân bằng. Bài toán bù tuyến tính có nhiều ứng dụng phong phú và đa dạng. Trong mục này ta sẽ mô tả một số ứng dụng cổ điển này và trong mỗi ứng dụng sẽ chỉ ra một số tính chất đặc biệt của ma trận M trong bài toán LCP tương ứng.

• Qui hoạch toàn phương

Xét bài toán qui hoạch toàn phương (Quadratic Program, viết tắt là QP)

$$f(x) = c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \to min$$

với các điều kiện

$$Ax \geq b, x \geq 0,$$

trong đó $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ đối xứng, $c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ và $b \in \mathbb{R}^m$. Trường hợp $Q = 0$ ta nhận được *bài toán qui hoạch tuyến tính* (Linear Program, viết tắt là LP). Nếu x là một nghiệm tối ưu địa phương của bài toán QP thì tồn tại véctơ $y \in \mathbb{R}^m$ sao cho cặp (x, y) thỏa mãn điều kiện Karush-Kuhn-Tucker, gọi tắt là *điều kiện KKT*:

$$u = c + Qx - A^T y \geq 0, x \geq 0, x^T u = 0, \tag{1.6}$$

$$v = -b + Ax \geq 0, \quad y \geq 0, y^T v = 0. \tag{1.7}$$

Thêm vào đó, nếu Q là ma trận nửa xác định dương, nghĩa là hàm mục tiêu $f(x)$ là lồi thì (1.6) - (1.7) là điều kiện đủ để cho véctơ x là một nghiệm tối ưu toàn cục của bài toán qui hoạch toàn phương lồi.

Các điều kiện (1.6) - (1.7) xác định bài toán bù tuyến tính LCP (q, M) với

$$q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} \text{ và } M = \begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

Để ý là ma trận M không đối xứng (trừ khi A không có hoặc bằng 0) mặc dù Q đối xứng. Tuy thế, M có tính chất gọi là *song đối xứng* (bisymmetry). Theo định nghĩa, một ma trận vuông N là *song đối xứng* nếu sau khi hoán vị một tập như nhau các hàng và cột, có thể đưa ma trận về dạng

$$N = \begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & H \end{bmatrix}$$

với G và H đối xứng. Nếu Q nửa xác định dương như trong qui hoạch toàn phương lồi thì M là một ma trận song đối xứng. (Nhớ rằng ma trận vuông Q là *nửa xác định dương* nếu $z^T Q z \geq 0$ với mọi véctơ z).

Một trường hợp riêng quan trọng của bài toán toàn phương QP là khi nó chỉ có các ràng buộc về dấu đối với các biến x. Khi đó, bài toán

QP có dạng đơn giản

$$f(x) = c^T x + x^T Qx \to min$$

với điều kiện

$$x \geq 0.$$

Nếu Q nửa xác định dương thì bài toán dạng đơn giản này hoàn toàn tương đương với bài toán LCP (c, Q). Có nhiều ứng dụng trong công nghiệp và vật lý dẫn tới mô hình qui hoạch toàn phương lồi dạng đặc biệt trên mà ta vừa chỉ ra là tương đương với bài toán bù tuyến tính LCP (c, Q). Các ứng dụng đó bao gồm bài toán tiếp xúc, bài toán chất lỏng nhớt, bài toán vật cản, bài toán xoắn chất dẻo đàn hồi cũng như nhiều bài toán biên tự do khác. LCP có vai trò quan trọng trong việc giải số các bài toán ứng dụng này.

• **Trò chơi song ma trận**

Trò chơi song ma trận (Bimatrix Game), ký hiệu G(A, B), gồm hai người chơi, gọi là *người chơi* I và *người chơi* II. Mỗi *người chơi* (Player) có một số hữu hạn *hành động* (actions), gọi là các *chiến lược đơn* (pure strategies), được quyền lựa chọn. Trong loại trò chơi này không nhất thiết một người thắng, một người thua. Vì thế, thuật ngữ trò *chơi song ma trận* thường có nghĩa là một trò chơi *hữu hạn* (finite), *hai người* (two-person), *tổng khác không* (nonzero-sum). Trò chơi đối kháng hai người với tổng bằng không thường được xét trong qui hoạch tuyến tính.

Ta hình dung người chơi I có m chiến lược đơn, người chơi II có n chiến lược đơn. Các chữ cái A và B trong ký hiệu trò chơi G(A, B) là các ma trận cấp $m \times n$ với các phần tử biểu thị chi phí hai người chơi phải trả. Như vậy, khi người chơi I chọn chiến lược đơn i $(i = 1, ..., m)$ và người chơi II chọn chiến lược đơn j $(j = 1, ..., n)$ thì mỗi người chơi phải trả một chi phí tương ứng là a_{ij} và b_{ij}. Do không đòi hỏi tổng hai chi phí này bằng 0 nên có thể có $a_{ij} + b_{ij} \neq 0$.

Chiến thuật hỗn hợp (mixed strategy) hay *chiến thuật ngẫu nhiên* (randomized strategy) của người chơi I là véctơ $x \in \mathbb{R}^m$ với thành phần x_i biểu thị xác suất chọn chiến lược đơn i, tức là $x \geq 0$ và $\sum_{i=1}^m x_i = 1$. Chiến lược hỗn hợp của người chơi II được định nghĩa tương tự. Do đó, nếu x và y là cặp chiến lược hỗn hợp tương ứng của người chơi I và II