ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

------------ ------------

LÊ MẠNH CỬU

MÔĐUN CHÍNH TẮC VÀ VÀNH GORENSTEIN TRONG TRƯỜNG HỢP CHIỀU CAO

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÊ MẠNH CỬU

MÔĐUN CHÍNH TẮC VÀ VÀNH GORENSTEIN TRONG TRƯỜNG HỢP CHIỀU CAO

Chuyên ngành : ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số : 60.46.01.04

LUẬN VĂN THẠC SỸ KHOA HỌC

HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. ĐOÀN TRUNG CƯỜNG

THÁI NGUYÊN - 2014

Mục lục

Lời mở đầu

Vành Gorenstein là một cấu trúc quan trọng trong đại số giao hoán và hình học đại số. Lớp các vành này có quan hệ chặt chẽ với vành chính quy, vành giao đầy đủ, vành Cohen-Macaulay theo sơ đồ

Chính quy $\Rightarrow$ giao đầy đủ $\Rightarrow$ Gorenstein $\Rightarrow$ Cohen-Macaulay.

Grothendieck là người đầu tiên đưa ra định nghĩa và nghiên cứu về vành Gorenstein, còn tên *Gorenstein* được đặt theo tên của nhà toán học Daniel Gorenstein (1923 - 1992) do công trình của ông về đối ngẫu trên các đường cong đại số. Vành Gorenstein được nhiều nhà toán học nghiên cứu, có thể kể đến các công trình của Macaulay, Serre, Grothendieck hay Bass. Trong đó, Bass là một trong những người có đóng góp nhiều nhất trong việc nghiên cứu vành này, các định nghĩa vành Gorenstein trong các tài liệu hiện nay hầu hết là của ông (xem thêm trong bài báo [4] của Huneke). Có nhiều cách để định nghĩa vành Gorenstein, trong đó tiêu biểu là thông qua tính hữu hạn của chiều nội xạ. Trong luận văn, chúng tôi chọn cách định nghĩa thông qua môđun chính tắc bởi nó có liên hệ chặt chẽ với lý thuyết đối ngẫu trên phạm trù các môđun.

Mục đích của luận văn là trình bày lại một số kết quả về môđun chính tắc và vành Gorenstein địa phương trong trường hợp chiều dương dựa theo tài liệu [3] của D. Eisenbud và [5] của H. Matsumura. Trường hợp chiều 0 được xét trong luận văn của Vũ Thị Duyên [2].

Luận văn chia làm ba chương. Trong Chương 1, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ sở về giải nội xạ tối tiểu, chiều nội xạ và môđun

Cohen-Maccaulay. Đây là những công cụ cơ bản dùng cho các định nghĩa và chứng minh ở hai chương sau.

Chương 2 được dành để trình bày về môđun chính tắc trên vành Cohen-Macaulay địa phương. Chương 2 chia làm hai phần. Tiết 1 của chương, chúng tôi trình bày về môđun chính tắc trên vành Cohen-Macaulay địa phương. Kết quả chính của tiết này là Định lý 2.1.7. Định lý này trình bày điều kiện cần và đủ để một môđun hữu hạn sinh trên một vành Cohen-Macaulay địa phương là môđun chính tắc thông qua độ sâu, chiều nội xạ và cấu trúc vành các tự đồng cấu. Tiết sau của chương, chúng tôi xét môđun chính tắc trên vành nửa nhóm một biến. Định lý 2.2.6 cho phép ta mô tả môđun chính tắc của vành nửa nhóm bất kỳ một cách cụ thể.

Chương cuối của luận văn, chúng tôi trình bày về vành Gorenstein địa phương. Tiết đầu của chương này, sau khi định nghĩa vành Gorenstein qua môđun chính tắc, chúng tôi trình bày đặc trưng Gorenstein của một vành địa phương thông qua chiều nội xạ và tính triệt tiêu của các môđun Ext. Đây nằm trong những đặc trưng quan trọng nhất của vành Gorenstein. Tiết 2 của chương, chúng ta trở lại với vành nửa nhóm một biến. Dựa vào các mô tả môđun chính tắc của vành nửa nhóm một biến trong chương 2, chúng tôi chứng minh một đặc trưng tính chất Gorenstein của vành này thông qua tính chất tổ hợp của nửa nhóm tương ứng (Định lý 3.2.1). Dựa vào đặc trưng đó, chúng tôi đưa ra một số ví dụ cụ thể vành nửa nhóm Gorenstein.

Vì điều kiện thời gian nên luận văn vẫn còn những thiếu sót. Tác giả mong nhận được sự góp ý của thầy cô, các bạn học viên, độc giả quan

tâm để luận văn được hoàn thiện hơn.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Đoàn Trung Cường, Viện Toán học. Thầy đã dành rất nhiều thời gian và công sức giúp tôi hoàn thành luận văn. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy. Tôi cũng xin cảm ơn TS. Trần Nguyên An, PGS. TS. Lê Thanh Nhàn đã tạo điều kiện và giúp đỡ tôi nắm những kiến thức cơ sở. Tôi xin cảm ơn các thầy cô ở Viện Toán học, Khoa Toán và Khoa Sau Đại học trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại trường.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2014

Tác giả luận văn

Lê Mạnh Cửu

Xác nhận của khoa Toán

Xác nhận của người hướng dẫn

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi trình bày định nghĩa và một số tính chất cơ bản về giải nội xạ tối tiểu, chiều nội xạ, dãy chính quy, độ sâu và môđun Cohen-Macaulay phục vụ cho việc tìm hiểu môđun chính tắc và vành Gorenstein sẽ được trình bày ở hai chương sau. Trong đó quan trọng nhất là Mệnh đề 1.1.9 cho ta cách xây dựng giải nội xạ tối tiểu của môđun M/xM trên vành $A/(x)$ khi biết giải nội xạ tối tiểu của môđun M trên vành A. Kết quả này được sử dụng thường xuyên trong các chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

1.1 Giải nội xạ tối tiểu và chiều nội xạ

Trong toàn bộ luận văn chúng tôi luôn xét vành là giao hoán và có đơn vị. Khái niệm môđun nội xạ được $R.\,Baer$ phát hiện vào năm 1940. Từ đó tới nay lớp môđun này đã trở thành công cụ quan trọng của đại số, trong đó có đại số giao hoán.

Định nghĩa 1.1.1. Cho A là một vành giao hoán, một $A-$môđun E là nội xạ nếu với mỗi đơn cấu $f : N \to M$ giữa các $A-$môđun và một đồng cấu $g : N \to E$, luôn tồn tại một đồng cấu $h : M \to E$ sao cho $g = h \circ f$.

Một tính chất cơ bản của môđun nội xạ là tính chất nội xạ được bảo toàn khi địa phương hóa tại một iđêan nguyên tố bất kì của vành. Và đó là nội dung của mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.1.2. *Cho A là một vành Noether, M là một $A-$môđun hữu hạn sinh và $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố của A. Khi đó* $\mathrm{Hom}_A(M,N)_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})$*, như là các $A_{\mathfrak{p}}-$môđun. Hệ quả là, nếu I là một $A-$môđun nội xạ thì $I_{\mathfrak{p}}$ là một $A_{\mathfrak{p}}-$môđun nội xạ.*

Chứng minh. Vì M là $A-$môđun hữu hạn sinh nên ta có một toàn cấu $\varphi : A^r \to M$, khi đó $\mathrm{Ker}\,\varphi$ cũng là $A-$môđun hữu hạn sinh nên tồn tại một toàn cấu $\psi : A^s \to \mathrm{Ker}\,\varphi$. Do đó dãy

$$A^s \xrightarrow{\psi} A^r \xrightarrow{\varphi} M \to 0 \ (1)$$

là khớp. Địa phương hóa dãy khớp trên tại iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ ta được dãy khớp

$$A^s_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\overline{\psi}} A^r_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\overline{\varphi}} M_{\mathfrak{p}} \to 0, \ (2)$$

trong đó $\overline{\psi}$ và $\overline{\varphi}$ là hai đồng cấu cảm sinh tương ứng của ψ và φ. Hơn nữa, ta được biểu đồ sau là giao hoán

$$\begin{tikzcd} A^s \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A^r \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ A^s_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & A^r_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\overline{\psi}"] & M_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Tác động hàm tử $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ vào (1) ta được dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(A^r, N) \to \mathrm{Hom}_A(A^s, N).$$

Địa phương hóa dãy khớp trên tại $\mathfrak{p}$ ta được dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N)_\mathfrak{p} \to \mathrm{Hom}_A(A^r,N)_\mathfrak{p} \to \mathrm{Hom}_A(A^s,N)_\mathfrak{p}.$$

Tác động hàm tử $\mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(-,N_\mathfrak{p})$ vào (2) ta được dãy khớp

$$0 \to \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p},N_\mathfrak{p}) \to \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(A_p^r,N_\mathfrak{p}) \to \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}^s,N_\mathfrak{p}).$$

Ta được một biểu đồ giao hoán với các dòng là khớp

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(M,N)_\mathfrak{p} & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathrm{Hom}_A(A^r,N)_\mathfrak{p} & \xrightarrow{\varphi_2} & \mathrm{Hom}_A(A^s,N)_\mathfrak{p} \\
& \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\
0 \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p},N_\mathfrak{p}) & \xrightarrow{\varphi_3} & \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}^r,N_\mathfrak{p}) & \xrightarrow{\varphi_4} & \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}^s,N_\mathfrak{p}),
\end{array}$$

trong đó φ_1 và φ_2 cảm sinh bởi ψ và φ, φ_3 và φ_4 cảm sinh bởi $\overline{\psi}$ và $\overline{\varphi}$, f_2 và f_3 là các đẳng cấu. Ta sẽ chứng minh f_1 là đẳng cấu. Giả sử $x \in \mathrm{Hom}_A(M,N)_\mathfrak{p}$ mà $f_1(x) = 0$. Suy ra $f_2(\varphi_1(x)) = \varphi_3(f_1(x)) = \varphi_3(0) = 0$. Do đó $\varphi_1(x) \in \mathrm{Ker}(f_2) = 0$ nên $x = 0$. Suy ra f_1 là đơn cấu. Tiếp theo, ta chứng minh f_1 là toàn cấu. Giả sử $y \in \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p},N_\mathfrak{p})$. Suy ra $\varphi_3(y) \in \mathrm{Ker}(\varphi_4)$, nên tồn tại $z \in \mathrm{Hom}_A(A^r,N)_\mathfrak{p}$ sao cho $f_2(z) = \varphi_3(y)$. Suy ra $z \in \mathrm{Im}\,\varphi_1$, nên tồn tại $x \in \mathrm{Hom}_A(M,N)_\mathfrak{p}$ mà $\varphi_1(x) = z$. Ta có $\varphi_3(f_1(x)) = f_2(\varphi_1(x)) = f_2(z) = \varphi_3(y)$. Vì φ_3 là đơn cấu nên $f_1(x) = y$. Do đó f_1 là toàn cấu. Vậy $\mathrm{Hom}_A(M,N)_\mathfrak{p} \cong \mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p},N_\mathfrak{p})$.

Nếu I là $A-$môđun nội xạ thì hàm tử $\mathrm{Hom}_A(-,I)$ từ phạm trù các $A-$môđun hữu hạn sinh tới phạm trù các $A-$môđun là hàm tử khớp. Do đó $\mathrm{Hom}_A(-,I)_\mathfrak{p}$ từ phạm trù các $A_\mathfrak{p}-$môđun hữu hạn sinh tới phạm trù các $A_\mathfrak{p}-$môđun là hàm tử khớp. Do đó $\mathrm{Hom}_{A_\mathfrak{p}}(-,I_\mathfrak{p})$ là khớp và $I_\mathfrak{p}$ là một $A_\mathfrak{p}-$môđun nội xạ. $\square$

Ứng với mỗi môđun có một môđun nội xạ rất quan trọng là bao nội xạ của môđun đó. Khái niệm này được trình bày ở phần tiếp theo cho phép ta xây dựng giải nội xạ tối tiểu của một môđun.

Định nghĩa 1.1.3. Cho M là một $A-$môđun không tầm thường trên vành giao hoán A. Một $A-$môđun nội xạ E được gọi là bao nội xạ của M nếu $M \subseteq E$ là môđun con và với mỗi môđun con khác không N của E luôn có $N \cap M \neq 0$. Ta kí hiệu bao nội xạ của M là $E(M)$.

Định nghĩa 1.1.4. Cho M là một $A-$môđun không tầm thường trên vành giao hoán A. Một giải nội xạ của $A-$ môđun M là một dãy khớp $0 \to M \to E_0 \to E_1 \to E_2 \to ...$, trong đó các E_i là nội xạ, với mọi $i \geq 0$.

Tiếp theo là định nghĩa về giải nội xạ tối tiểu, một công cụ quan trọng để nghiên cứu về môđun chính tắc.

Định nghĩa 1.1.5. Cho M là một môđun trên vành giao hoán A. Một giải nội xạ của M

$$0 \to M \to E_0 \to E_1 \to ...$$

là giải nội xạ tối tiểu nếu với mỗi $n > 0$, ta đặt $M_n = \mathrm{Coker}(E_{n-1} \to E_n)$ thì $E_{n+1} \cong E(M_n)$ và ánh xạ $E_n \to E_{n+1}$ là hợp thành của hai ánh xạ tự nhiên

$$E_n \to M_n \to E_{n+1} = E(M_n).$$

Ngoài định nghĩa trên, giải nội xạ tối tiểu còn có một cách định tương đương khác như sau.

Bổ đề 1.1.6. *Cho M là một môđun trên vành giao hoán A. Một dãy $A-$môđun nội xạ*

$$\mathrm{E}_\bullet : \ E_0 \to E_1 \to ... \to E_n \to E_{n+1} \to ...$$