ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ LAN

ĐỘ TĂNG CỦA ĐA THỨC TRÊN TẬP ĐẠI SỐ

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ LAN

ĐỘ TĂNG CỦA ĐA THỨC TRÊN TẬP ĐẠI SỐ

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH Nguyễn Quang Diệu**

THÁI NGUYÊN - 2014

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2014

Xác nhận của thầy HD	Người viết Luận văn
GS.TSKH Nguyễn Quang Diệu	Nguyễn Thị Lan

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của GS. TSKH. Nguyễn Quang Diệu (Trường Đại Học Sư Phạm Hà Nội 1). Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn ban lãnh đạo phòng sau Đại học, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K20 (2012- 2014) Trường Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2014
Người viết Luận văn

Nguyễn Thị Lan

Mục lục

Lời cam đoan i

Lời cảm ơn ii

Mục lục iv

Mở đầu 1

1 Kiến thức liên quan 2

1.1 Hàm chỉnh hình một biến . . . 2

1.1.1 Định nghĩa hàm $\mathbb{C}$ - khả vi . . . 2

1.1.2 Điều kiện Cauchy - Rieman . . . 2

1.1.3 Hàm chỉnh hình một biến . . . 6

1.1.4 Các tính chất cơ bản của hàm chỉnh hình một biến . . . 6

1.2 Hàm chỉnh hình nhiều biến . . . 9

1.2.1 Hàm $\mathbb{C}$ - tuyến tính . . . 9

1.2.2 Hàm $\mathbb{C}$ - khả vi . . . 9

1.2.3 Hàm chỉnh hình nhiều biến . . . 10

1.2.4 Các tính chất cơ bản của hàm chỉnh hình nhiều biến . . . 11

1.3 Tập giải tích và tập đại số . . . 13

1.3.1 Tập giải tích . . . 13

1.3.2 Tập đại số . . . 15

1.4 Định lý Bezout . . . 16

1.5 Định lý Remmert . . . 19

1.6 Định lý Sadullaev . . . 19

2 Độ tăng của đa thức trên tập đại số 21

2.1 Định lý cơ bản . . . 21

2.2 Ví dụ . . . 25

2.3 Độ tăng của đa thức trên các hàm song chính quy 27
2.4 Định lý cơ bản đối với đường cong đại số 28
2.5 Trường hợp siêu mặt đại số 32

Kết luận chung 38

Tài liệu tham khảo 39

Mở đầu

Tập đại số phức là không điểm chung của một họ các đa thức trong $\mathbb{C}^n$. Việc nghiên cứu tập đại số phức là một trong những vấn đề quan trọng trong hình học đại số và giải tích phức nhiều biến. Mục đích của tác giả là nghiên cứu cấu trúc của không gian các đa thức trên tập đại số thỏa mãn các điều kiện về độ tăng tại vô hạn. Ngoài ra, tác giả cũng đưa ra những ví dụ minh họa cho các kêt quả chính.

Đề tài của luận văn là **Độ tăng của đa thức trên tập đại số**. Nội dung của luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 nhắc lại một số kiến thức có liên quan như hàm chỉnh hình, tập đại số, tập giải tich, và một vài định lý quan trọng. Chương 2 trình bày các định lý cơ bản về độ tăng đại số trên các tập đại số.

Do vấn đề được đề cập trong luận văn là tương đối phức tạp nên nội dung của luận văn mang tính chất sắp xếp một cách hệ thống các kiến thức có liên quan và trình bày lại kết quả của bài báo *The growth of regular functions on algebraic sets* của tác giả A. STREBONSKI (Kraków).

Chương 1

Kiến thức liên quan

Trong Chương 1, chúng ta đã nhắc lại các kết quả quan trọng của hàm chỉnh hình một biến phức, nhiều biến phức, các định nghĩa, định lý quan trọng, những kiến thức trong chương này là cơ sở cho các vấn đề được nghiên cứu trong chương sau. Nội dung chương này chủ yếu dựa trên các nguồn tài liệu [1], [2].

1.1 Hàm chỉnh hình một biến

Hàm của hai biến thực có thể xem như hàm của một biến phức. Điều này cùng với cấu trúc đại số của $\mathbb{C}$ dẫn ta đến một lớp hàm hết sức quan trọng, đó là lớp hàm $\mathbb{C}$ - khả vi.

1.1.1 Định nghĩa hàm $\mathbb{C}$ - khả vi

Định nghĩa 1.1. *Cho hàm số f xác định trong miền $D \subset \mathbb{C}$. Xét giới hạn*

$$\lim_{\Delta z \to \infty} \frac{f(\Delta z + z) - f(z)}{\Delta z}, \quad z, \Delta z \in D.$$

Nếu tại điểm z giới hạn này tồn tại thì nó được gọi là đạo hàm phức của f tại z, kí hiệu là $f'(z)$ hay $\dfrac{df}{dz}(z)$.

Như vậy

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to \infty} \frac{f(\Delta z + z) - f(z)}{\Delta z}. \tag{1.1}$$

Hàm f có đạo hàm phức tại z cũng được gọi là khả vi phức hay $\mathbb{C}$ - khả vi tại z.

1.1.2 Điều kiện Cauchy - Rieman

Định nghĩa 1.2. *(Hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi)*

Giả sử $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z = x + iy$ xác định trong miền $D \subset \mathbb{C}$. Hàm f được gọi là $\mathbb{R}^2$ - khả vi tại $z = x + iy$ nếu các hàm $u(x,y)$ và $v(x,y)$ khả vi tại (x,y) (theo nghĩa đã biết trong giải tích thực).

Điều kiện Cauchy - Rieman

Để hàm số f $\mathbb{C}$ - khả vi tại $z = x + iy \in D$ thì điều kiện cần và đủ là hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi tại z và điều kiện Cauchy - Rieman sau được thỏa mãn

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\end{aligned}$$

Chứng minh. **Điều kiện cần**

Giả sử f $\mathbb{C}$ - khả vi tại $z = x + iy \in D$. Khi đó tồn tại giới hạn

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},\ \ \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Vì giới hạn này tồn tại không phụ thuộc vào cách tiến đến 0 của Δ nên nếu chọn $\Delta z = \Delta x$, ta có

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta z \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}\end{aligned}$$

tức là u và v có đạo hàm riêng theo x tại (x,y) và

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y). \tag{1.2}$$

Tương tự, bằng cách chọn $\Delta z = i\Delta y$ ta có

$$f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y). \tag{1.3}$$

So sánh (1.2) và (1.3) ta nhận được

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\end{aligned}$$

Ta còn phải chứng tỏ $u(x,y)$ và $v(x,y)$ khả vi tại (x,y).

Vì f $\mathbb{C}$ - khả vi tại z nên

$$\Delta f = f(z+\Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + 0(\Delta z)$$

với $0(\Delta z)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δz, tức là

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{0(\Delta z)}{\Delta z} = 0.$$

Rõ ràng

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v, \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Theo (1.2) ta có

$$\Delta u + i\Delta v = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + i0(\Delta z).$$

Từ đó

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + 0(\Delta z) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + 0(|\Delta z|)$$
$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y + 0(\Delta z) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + 0(|\Delta z|)$$

Điều đó có nghĩa là u và v khả vi tại (x, y).

Điều kiện đủ

Vì u và v khả vi tại (x, y) nên

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + 0\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$
$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + 0\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

Theo điều kiện Cauchy - Rieman, hai đẳng thức này có thể viết thành

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x\Delta y} + 0(|\Delta z|)$$
$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + 0(|\Delta z|)$$