ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU

TÍNH BÃO HÒA NGUYÊN TỐ CỦA MỘT SỐ MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG ARTIN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, tháng 05, năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

------------ ------------

NGUYỄN THỊ THU

TÍNH BÃO HÒA NGUYÊN TỐ CỦA MỘT SỐ MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG ARTIN

Chuyên ngành : ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số : 60.46.01.04

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. LÊ THỊ THANH NHÀN

Thái Nguyên, tháng 05, năm 2014

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành dưới sự chỉ bảo và hướng dẫn tận tình của PGS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Cô đã dành nhiều thời gian hướng dẫn và giải đáp thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến cô.

Tôi xin gửi tới các thầy cô ở Viện Toán học Hà Nội, Khoa Toán, Khoa Sau đại học Trường Đại học Sư phạm-Đại học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập tại trường.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và người thân đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên, cổ vũ để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Lời nói đầu

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán Noether địa phương với iđêan tối đại duy nhất $\mathfrak{m}$. Cho M là R-môđun hữu hạn sinh với chiều Krull $\dim M = d$. Giả sử $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ sao cho $\mathfrak{p}$ chứa $\operatorname{Ann}_R M$. Khi đó $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R M$, vì thế $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Theo Bổ đề Nakayama ta có $M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Suy ra $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}_R(M/\mathfrak{p}M)$ và do đó $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M)$. Hiển nhiên $\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M)$. Vì thế ta luôn có

$$\operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M) = \mathfrak{p} \text{ với mọi iđêan nguyên tố } \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R M.$$

Theo suy nghĩ đối ngẫu, N. T. Cường và L. T. Nhàn [CN] đã xét tính chất sau đối với các R-môđun Artin A

$$\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \text{ với mọi iđêan nguyên tố } \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R A. \qquad (*)$$

Khi R là vành đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic, sử dụng đối ngẫu Matlis và áp dụng tính chất trên của các môđun hữu hạn sinh, ta thấy rằng tính chất (*) luôn đúng cho mọi R-môđun Artin A. Tuy nhiên, Nguyễn Tự Cường và Lê Thanh Nhàn [CN] đã xây dựng ví dụ chỉ ra rằng tính chất (*) nhìn chung không còn đúng khi vành R không đầy đủ.

Định nghĩa. Ta nói R-môđun Artin A là *bão hòa nguyên tố* nếu A thỏa mãn tính chất (*).

Tính bão hòa nguyên tố được giới thiệu bởi N. T. Cường và L. T. Nhàn [CN] nhằm nghiên cứu chiều của môđun Artin. Chú ý rằng môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ luôn là R-môđun Artin với mọi cấp i. Năm 2007, N. T. Cường, N. T. Dung, L. T. Nhàn [CDN] đã đặc trưng tính bão hòa nguyên tố của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá cực đại như sau.

Định lí 1. *$H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là bão hòa nguyên tố khi và chỉ khi $R/\operatorname{Ann}_R H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ là vành catenary.*

Với mỗi iđêan I của R, kí hiệu $\operatorname{Var}(I)$ là tập các iđêan nguyên tố của R chứa I. Năm 2009, L. T. Nhàn và T. N. An [NA] đã đặc trưng tính bão hòa nguyên tố của môđun đối đồng điều cấp i tùy ý với giá cực đại thông qua tập giả giá. Theo Brodmann và Sharp [BS1], *giả giá* thứ i của M, kí hiệu là $\operatorname{Psupp}^i_R(M)$, được định nghĩa bởi như sau:

$$\operatorname{Psupp}^i_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) : H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \neq 0\}.$$

Định lí 2. $\operatorname{Psupp}^i_R(M) \subseteq \operatorname{Var}(\operatorname{Ann}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M))$. *Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ là bão hòa nguyên tố.*

Chúng ta biết rằng môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá I tùy ý luôn là môđun Artin. Năm 2012, L. T. Nhàn và T. Đ. M. Châu [NC] đã đặc trưng tính bão hòa nguyên tố của $H^d_I(M)$. Theo I. G. Macdonald [Mac], với mỗi R-môđun Artin A, kí hiệu $\operatorname{Att}_R A$ là tập các iđêan nguyên tố gắn kết của A.

Định lí 3. *$H^d_I(M)$ là bão hòa nguyên tố nếu và chỉ nếu $R/\operatorname{Ann}_R H^d_I(M)$ là vành catenary và*

$$\operatorname{Att}_R H^d_I(M) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M : \dim(R/\mathfrak{p}) = d, \sqrt{\mathfrak{p} + I} = \mathfrak{m}\}.$$

Mục đích của luận văn là chứng minh lại chi tiết 3 định lí đã nêu ở trên về tính bão hòa nguyên tố của một số môđun đối đồng điều địa phương Artin trong các bài báo [CDN], [NA], [NC].

Luận văn gồm 2 chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về vành đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic và đối ngẫu Matlis, lí thuyết biểu diễn thứ cấp cho môđun Artin, khái niệm và tính chất cơ sở của môđun đối đồng điều địa phương, tính catenary của vành. Chương 2 đưa ra chứng minh chi tiết cho các đặc trưng tính bão hòa nguyên tố của một số môđun đối đồng điều địa phương Artin $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$, $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ và $H^d_I(M)$.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong suốt luận văn này, luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là một vành giao hoán Noether, địa phương với iđêan tối đại duy nhất là $\mathfrak{m}$. Cho A là R-môđun Artin và M là R-môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d$. Mục đích của Chương 1 là trình bày lại một số kiến thức chuẩn bị về vành đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic và đối ngẫu Matlis, lý thuyết biểu diễn thứ cấp cho môđun Artin, tính chất cơ sở của môđun đối đồng điều địa phương và tính catenary của vành.

1.1 Đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic và đối ngẫu Matlis

Kí hiệu $E(R/\mathfrak{m})$ là bao nội xạ của trường thặng dư $R/\mathfrak{m}$, L là một R-môđun (không nhất thiết hữu hạn sinh, cũng không nhất thiết Artin). Mục đích của tiết này là nhắc lại khái niệm vành đầy đủ $\widehat{R}$ của R theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic và một số kết quả về hàm tử đối ngẫu Matlis $D(-) := \mathrm{Hom}_R(-, E(R/\mathfrak{m}))$. Các thuật ngữ ở đây được tham khảo trong chương 10 của cuốn sách [BS] của M. Brodmann và R. Y. Sharp.

Định nghĩa 1.1.1. Một dãy $(x_n) \subset R$ được gọi là một *dãy Cauchy theo tôpô* $\mathfrak{m}$*-adic* nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$x_n - x_m \in \mathfrak{m}^k$, với mọi $m, n \geq n_0$. Dãy $(x_n) \subset R$ được gọi là *dãy không* nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n \in \mathfrak{m}^k$,với mọi $n \geq n_0$. Ta trang bị quan hệ tương đương trên tập các dãy Cauchy như sau : Hai dãy Cauchy $(x_n), (y_n)$ được gọi là *tương đương* nếu dãy $(x_n - y_n)$ là dãy không. Kí hiệu $\widehat{R}$ là tập các lớp tương đương của các dãy Cauchy. Chú ý rằng tổng và tích của hai dãy Cauchy là một dãy Cauchy, quy tắc cộng $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ và quy tắc nhân $(x_n)(y_n) = (x_n y_n)$ không phụ thuộc vào cách chọn đại diện của các lớp tương đương. Vì thế nó là các phép toán trên $\widehat{R}$ và cùng với phép toán này $\widehat{R}$ làm thành một vành Noether địa phương với iđêan tối đại duy nhất là $\mathfrak{m}\widehat{R}$. Vành $\widehat{R}$ vừa xây dựng được gọi là *vành đầy đủ theo tôpô* $\mathfrak{m}$*-adic* của R.

Một dãy $(z_n) \subset M$ được gọi là *dãy Cauchy theo tôpô* $\mathfrak{m}$*-adic* nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $z_n - z_m \in \mathfrak{m}^k M$, với mọi $m, n \geq n_0$. Dãy $(z_n) \subset M$ gọi là *dãy không* nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $z_n \in \mathfrak{m}^k$, với mọi $n \geq n_0$. Ta trang bị quan hệ tương đương trên tập các dãy Cauchy như sau: Hai dãy Cauchy $(z_n), (t_n)$ được gọi là *tương đương* nếu dãy $(z_n - t_n)$ là dãy không. Kí hiệu $\widehat{M}$ là tập các lớp tương đương của các dãy Cauchy. Chú ý rằng tổng của hai dãy Cauchy là một dãy Cauchy và tích vô hướng của một phần tử thuộc $\widehat{R}$ với một dãy Cauchy là một dãy Cauchy, quy tắc cộng $(z_n) + (t_n) = (z_n + t_n)$ và quy tắc nhân vô hướng $a(z_n) = (az_n)$ với $a \in \widehat{R}$, không phụ thuộc vào cách chọn đại diện của các lớp tương đương. Vì thế nó là các phép toán trên $\widehat{M}$ và cùng với phép toán này $\widehat{M}$ làm thành một $\widehat{R}$-môđun và được gọi là *môđun đầy đủ theo tôpô* $\mathfrak{m}$*-adic* trên vành $\widehat{R}$

Ví dụ 1.1.2. Cho k là một trường, $k[x]$ là vành đa thức 1 biến trên k. Vành $S = k[x]$ không là vành địa phương. Chọn $P = (x)S$ là iđêan cực đại của S. Do đó vành địa phương hóa $R = S_P$ là vành địa phương với iđêan tối đại là $\mathfrak{m} = (x)R$. Ta có thể kiểm tra được vành đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic của R là $k[[x]]$.

Định nghĩa 1.1.3. Cho $L \neq 0$ là một R-môđun, một R-môđun E được gọi là *mở rộng cốt yếu* của một môđun L nếu $L \subseteq E$ và với mỗi môđun con khác không N của E luôn có $N \cap L \neq 0$. Một R-môđun E được gọi là *bao nội xạ* của L nếu E là R-môđun nội xạ và là mở rộng cốt yếu của L. Mỗi R-môđun L luôn có ít nhất một bao nội xạ. Hơn nữa, nếu E và E' là những bao nội xạ của L, thì tồn tại một đẳng cấu $f : E \to E'$ sao cho $f(x) = x$, với mọi $x \in L$. Ta kí hiệu bao nội xạ của môđun L là $E(L)$.

Một *giải nội xạ* của L là một dãy khớp

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow ....$$

trong đó mỗi E_i là R-môđun nội xạ. Chú ý rằng mỗi môđun đều có giải nội xạ.

Dãy $0 = L_0 \subsetneqq L_1 \subsetneqq L_2 ... \subsetneqq L_t = L$ (*) trong đó mỗi L_i là môđun con của của L được gọi là *dãy môđun con độ dài t*. Ta nói L có dãy hợp thành nếu tồn tại dãy (*) mà giữa L_i và L_{i+1} không thể thêm một môđun con nào khác, với mọi $i = 0, ..., t-1$. Nếu L có dãy hợp thành thì mọi dãy môđun con không có mắt lặp lại của L đều có thể mở rộng được thành một dãy hợp thành và các dãy hợp thành của L có chung độ dài. Trong trường hợp này ta nói L *có độ dài hữu hạn* và độ dài của L, kí hiệu là $\ell_R(L)$, là độ dài của một dãy hợp thành. Nếu L không có dãy hợp thành thì ta nói L có độ dài vô hạn, ta kí hiệu $\ell_R(L) = \infty$.

Định nghĩa 1.1.4. Đặt $E := E(R/\mathfrak{m})$ là bao nội xạ của trường thặng dư $R/\mathfrak{m}$ của R. Xét hàm tử $D(-) = \mathrm{Hom}(-, E)$ từ phạm trù các R-

môđun đến chính nó. Ta thấy $D(-)$ là hàm tử phản biến, tuyến tính và khớp trái. Vì E là môđun nội xạ nên $D(-)$ là hàm tử khớp. Với mỗi R-môđun L, ta gọi $D(L)$ là *đối ngẫu Matlis* của L.

Xét $\mu_L : L \to DD(L) = \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_R(L, E), E)$ là R-đồng cấu cho bởi $(\mu_L(x))(f) = f(x)$, với mọi $x \in L$, với mọi $f \in \operatorname{Hom}_R(L, E)$. Ta có μ_L là đơn cấu. Thật vậy, với mọi $x \in L, f \in \operatorname{Hom}_R(L, E)$ mà $(\mu_L(x))(f) = f(x) = 0$, suy ra $f = 0$.

Đặt $\operatorname{Ann}_R L = \{a \in R \mid aL = 0\}$. Chú ý rằng $\operatorname{Ann}_R L$ là một iđêan của R.

Bổ đề 1.1.5. *Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương. Với các kí hiệu như trên, các phát biểu sau là đúng.*

(i) $\operatorname{Ann}_R L = \operatorname{Ann}_R D(L)$.

(ii) Nếu $\ell_R(L) < \infty$ thì $D(L) \cong L$.

(iii) Nếu L là môđun Noether thì $D(L)$ là môđun Artin.

(iv) $(R, \mathfrak{m})$ là vành đầy đủ và L là môđun Artin thì $D(L)$ là môđun Noether.

1.2 Biểu diễn thứ cấp cho các môđun Artin

Mục tiêu của tiết này là trình bày các khái niệm và tính chất về biểu diễn thứ cấp cho các môđun Artin, đặc biệt về tập iđêan nguyên tố gắn kết nhằm phục vụ chứng minh các kết quả ở Chương 2. Các kiến thức trong tiết này được tham khảo trong bài báo [Mac] của I. G. Macdonald. Trong suốt tiết này luôn giả thiết A là R-môđun Artin.

Định nghĩa 1.2.1. (i) Cho $x \in R$. Nếu tồn tại số tự nhiên n sao cho