ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THỊ KIM DUNG

TÍNH TAUT YẾU VÀ TAUT YẾU ĐỊA PHƯƠNG CỦA MỘT MIỀN TRONG KHÔNG GIAN BANACH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THỊ KIM DUNG

TÍNH TAUT YẾU VÀ TAUT YẾU ĐỊA PHƯƠNG CỦA MỘT MIỀN TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS. TS. PHẠM VIỆT ĐỨC

Thái Nguyên - Năm 2014

Mục lục

Mở đầu

Một trong những bài toán quan trọng của Giải tích phức hyperbolic là tìm các đặc trưng khác nhau cho tính hyperbolic của một không gian phức. Như ta đã biết mỗi không gian phức taut là hyperbolic. Do đó ta có thể nghiên cứu tính hyperbolic của không gian phức thông qua việc tìm hiểu tính taut của không gian đó. Điều đó cho thấy tính taut là một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu lớp các không gian phức hyperbolic hữu hạn chiều.

Tuy nhiên khái niệm taut không tồn tại trong hoàn cảnh các miền trong không gian Banach. Bằng cách đưa ra khái niệm taut yếu và taut yếu địa phương của một miền trong không gian Banach, Lê Mậu Hải và Phạm Khắc Ban [4] đã thiết lập được mối liên hệ giữa tính taut yếu với tính hyperbolic của một đa tạp giải tích Banach, đồng thời chứng minh được mối liên hệ giữa tính taut yếu địa phương với tính taut yếu của một miền không bị chặn trong không gian Banach.

Mục đích của luận văn này là trình bày tường minh kết quả nói trên.

Nội dung của luận văn gồm hai chương:

Chương 1: Một số kiến thức chuẩn bị. Trong chương này chúng tôi trình bày các kiến thức chuẩn bị về không gian phức hyperbolic, không gian phức taut và một số kết quả liên quan đến chương sau trong trường hợp hữu hạn chiều.

Chương 2: Tính taut yếu và taut yếu địa phương của một miền trong không gian Banach. Nội dung của chương này bao gồm một số khái niệm ban đầu về giải tích hyperbolic trong không gian Banach; mối liên hệ giữa tính taut yếu và tính hyperbolic của đa tạp giải tích Banach. Cuối chương là một số tiêu chuẩn cho tính taut yếu của một miền không bị chặn trong không gian Banach.

Luận văn được thực hiện và hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới dự hướng dẫn khoa học của PGS. TS. Phạm Việt Đức. Qua đây, tác giả xin được gửi lời cảm ơn sâu sắc đến thầy giáo, người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đưa ra đề tài và tận tình hướng dẫn trong suốt quá trình nghiên cứu của tác giả. Đồng thời tác giả cũng chân thành cảm ơn các thầy cô trong khoa Toán, Phòng Sau Đại học - Trường Đại học Sư phạm, Đại học Thái Nguyên, đã tạo mọi điều kiện cho tác giả về tài liệu và thủ tục hành chính để tác giả hoàn thành bản luận văn này. Tác giả cũng gửi lời cảm ơn đến gia đình và các bạn trong lớp Cao học Toán K20a, đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2014

Tác giả

Phạm Thị Kim Dung

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị về tính hyperbolic và tính taut trong trường hợp hữu hạn chiều.

1.1 Giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức

Với $0 < r < \infty$ ta đặt $\Delta_r = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$, $\Delta_1 = \Delta$, và gọi Δ_r là đĩa bán kính r, Δ là đĩa đơn vị trong $\mathbb{C}$.

1.1.1 Định nghĩa

Giả sử X là một không gian phức, x và y là hai điểm tùy ý của X. $Hol(\Delta, X)$ là tập tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ Δ vào X, được trang bị tôpô compact mở. Xét dãy các điểm $p_0 = x$, $p_1, ..., p_k = y$ của X, dãy các điểm $a_1, a_2, ..., a_k$ của Δ và dãy các ánh xạ $f_1, ..., f_k$ trong $Hol(\Delta, X)$ thỏa mãn

$$f_i(0) = p_{i-1}, f_i(a_i) = p_i, \forall i = 1, ..., k.$$

Tập hợp $\alpha = \{p_0, ..., p_k, a_1, ..., a_k, f_1, ..., f_k\}$ thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là một dây chuyền chỉnh hình (hay các đĩa chỉnh hình) nối

x và y trong X.

Ta định nghĩa

$$d_X(x, y) = \inf_{\alpha}\{\sum_{i=1}^{k} \rho_D(0, a_i), \alpha \in \Omega_{\text{x, y}}\},$$

trong đó $\Omega_{\text{x, y}}$ là tập hợp các dây chuyền chỉnh hình nối x và y trong X.

Khi đó $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ là một giả khoảng cách trên X và gọi là giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức X.

1.1.2 Một số tính chất của giả khoảng cách Kobayashi

1.1.2.1 Nếu $f : X \to Y$ là ánh xạ chỉnh hình giữa hai không gian phức thì f làm giảm khoảng cách đối với giả khoảng cách Kobayashi, nghĩa là

$$d_X(x, y) \geq d_Y(f(x), f(y)), \quad \forall \text{x, y} \in X.$$

Hơn nữa, d_X là giả khoảng cách lớn nhất trên X thỏa mãn mọi ánh xạ chỉnh hình $f : \Delta \to X$ là giảm khoảng cách.

1.1.2.2 $d_\Delta = \rho_\Delta$ là metric Bergman - Poincaré trên đĩa đơn vị Δ.

1.1.2.3 $d_{\mathbb{C}^n} \equiv 0$.

1.1.2.4 Giả sử X là không gian phức. Khi đó, giả khoảng cách Kobayashi $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục.

Trong trường hợp X là đa tạp phức ta có phép chứng minh đơn giản đối với tính liên tục của d_X như sau:

1.1.2.5 Định lý *Giả sử X là đa tạp phức. Khi đó, giả khoảng cách kobayashi là hàm liên tục.*

Chứng minh. Theo bất đẳng thức tam giác ta có

$$|d_X(x_n, y_n) - d_X(x, y)| \leq d_X(x_n, x) + d_X(y_n, y),$$

với mọi $x_n, y_n, x, y \in X$. Do đó để chứng minh tính liên tục của d_X ta chỉ cần chứng minh $d_X(y_n, y) \to 0$ khi $y_n \to y$.

Gọi U là một lân cận tọa độ quanh y mà song chỉnh hình với Δ^n,
$n = dimX$. Ta có

$$d_{\Delta^n}((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = max\{d_\Delta(x_i, y_i), i = 1, ..., n\}.$$

Vì U song chỉnh hình với Δ^n nên theo tính chất của giả khoảng cách Kobayashi ta có $d_U = d_{\Delta^n}$ liên tục.
Do đó, $d_X(y_n, y) \leq d_U(y_n, y) \to 0$ khi $y_n \to y$. Vậy d_X liên tục. □

1.2 Không gian phức hyperbolic

1.2.1 Định nghĩa

Không gian phức X được gọi là không gian hyperbolic (theo nghĩa Kobayashi) nếu giả khoảng cách Kobayashi d_X là khoảng cách trên X, tức là

$$d_X(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q \quad \forall \text{p,q} \in X$$

Không gian phức X được gọi là hyperbolic đầy nếu X là hyperbolic và đầy đối với khoảng cách Kobayashi d_X, tức là mọi dãy cơ bản đối với khoảng cách d_X đều hội tụ.
Nhận xét. Từ định nghĩa và tính chất giảm khoảng cách qua các ánh xạ chỉnh hình ta có tính hyperbolic của không gian phức là một bất biến song chỉnh hình.

1.2.2 Một số tính chất

1.2.2.1 Nếu X, Y là các không gian phức, thì $X \times Y$ là không gian hyperbolic nếu và chỉ nếu cả X và Y đều là không gian hyperbolic.

1.2.2.2 Giả sử X là không gian con phức của không gian phức Y. Nếu Y là hyperbolic thì X cũng là hyperbolic. Hay nói cách khác, không gian con của một không gian hyperbolic là hyperbolic.

1.2.2.3 Định lý (Barth) *Giả sử X là không gian phức liên thông. Nếu X là hyperbolic thì d_X sinh ra tô pô tự nhiên của X.*

Chứng minh. Ta có không gian phức X là compact địa phương với tô pô đếm được, do đó nó metric hóa được bởi định lý metric hóa Urưxơn. Vì vậy có hàm khoảng cách ρ xác định tô pô tự nhiên của X. Ta phải chứng minh d_X và ρ là so sánh được, tức là với $\{x_n\} \subset X$ ta có

$$\rho(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow d_X(x_n, x) \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do d_X liên tục nên từ $\rho(x_n, x) \to 0$ suy ra $d_X(x_n, x) \to 0$ khi $n \to \infty$.

Ngược lại, giả sử $d_X(x_n, x) \to 0$ mà $\rho(x_n, x) \not\to 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó tồn tại $s > 0$ sao cho có dãy con (vẫn ký hiệu là $\{x_n\}$) mà các x_n nằm ngoài $\rho-$cầu tâm x, bán kính s.

Nối x_n với x bởi một dây chuyền chỉnh hình. Gọi γ là ảnh của các trắc địa trong đĩa qua dây chuyền trên, $\gamma : [a, b] \to X$.

Xét hàm $t \mapsto \rho(\gamma(t), x)$, đây là một hàm liên tục do đó tồn tại $t_0 \in [a, b]$ sao cho $\rho(\gamma(t_0), x) = s$. Vậy điểm $y_n = \gamma(t_0)$ nằm trên mặt cầu tâm x bán kính s (đối với metric ρ). Từ đó theo định nghĩa giả khoảng cách Kobayashi ta có

$$d_X(y_n, x) \leq d_X(x_n, x) \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Do tính compact địa phương, dãy $\{y_n\}$ có dãy con $\{y_{n_k}\}$ hội tụ tới y thuộc mặt cầu tâm x, bán kính s (đối với metric ρ).

Khi đó,

$$d_X(y, x) = \lim_{n \to \infty} d_X(y_{n_k}, x) = 0,$$

mà $y \neq x$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết X là không gian hyperbolic. Định lý được chứng minh. □

1.2.3.4 Ví dụ

+) Đĩa Δ_r và đa đĩa Δ_r^m là hyperbolic.

+) Một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^m$ là hyperbolic, vì nó là tập con mở của tích các đa đĩa.

+) $\mathbb{C}^m$ không là hyperbolic, vì $d_{\mathbb{C}^m} \equiv 0$.