ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VŨ THUỲ THƯƠNG

XÁC ĐỊNH DUY NHẤT ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH BỞI HỌ SIÊU MẶT DI ĐỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

VŨ THUỲ THƯƠNG

XÁC ĐỊNH DUY NHẤT ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH BỞI HỌ SIÊU MẶT DI ĐỘNG

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hướng dẫn khoa học:
TS. HÀ TRẦN PHƯƠNG

Thái Nguyên - Năm 2014

Mục lục

Lời nói đầu

Vấn đề nghiên cứu ứng dụng của lý thuyết Nevanlinna-Cartan (cũng như lý thuyết Nevanlinna) trong các lĩnh vực khác nhau của toán học thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới, đặc biệt là trong việc nghiên cứu sự xác định của ánh xạ phân hình (cũng như hàm phân hình) thông qua ảnh ngược của một hay nhiều tập hữu hạn phần tử. Chẳng hạn : R. Nevanlinna, H. Fujimoto, L. Smiley, H. H. Khoai, G. Dethloff, D. D. Thai, C. C. Yang, M. Ru và nhiều nhà toán học khác. Năm 1926, R. Nevanlinna chứng minh: *Hai hàm phân hình phức khác hằng f, g thỏa mãn $f^{-1}(a_i) = g^{-1}(a_i),\ i = 1, \ldots, 5,$ thì $f \equiv g$.* Năm 1975, H. Fujimoto mở rộng kết quả này của Nevanlinna cho ánh xạ phân hình vào không gian xạ ảnh phức, Ông chỉ ra rằng nếu hai ánh xạ phân hình phức không suy biến tuyến tính chung nhau $3n + 2$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát kể cả bội thì chúng trùng nhau. Từ đó đến nay, vấn đề nghiên cứu sự xác định duy nhất cho các ánh xạ phân chỉnh hình phát triển mạnh mẽ và thu được nhiều kết quả: Fujimoto ([9]), Dethloff và Tan ([6]), Dulock và Ru ([7]), Phuong ([12], [13], [14]) và nhiều tác giả khác. Thời gian gần đây các tác giả tập trung vào việc nghiên cứu các vấn đề:

1. Tìm các đặc trưng của tập xác định duy nhất
2. Tìm dạng tập xác định duy nhất với số phần tử ít nhất có thể.

Với mong muốn tìm hiểu nghiên cứu theo hướng này, chúng tôi chọn đề tài **"Xác định duy nhất đường cong chỉnh hình bởi họ siêu mặt di động"**. Mục đích chính của luận văn là hệ thống lại một số dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình và trình bày lại một số kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trong trường hợp siêu mặt di động.

Luận văn gồm hai chương:

Chương 1: Mở đầu về lý thuyết phân bố giá trị cho đường cong chỉnh hình. Trong chương này chúng tôi các kiến thức cơ sở, cần thiết cho chứng minh kết quả trong chương hai: lý thuyết Nevanlinna, lý thuyết Nevanlinna cho đường cong chỉnh hình.

Chương 2: Về định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình. Trong chương này, chúng tôi trình bày các nghiên cứu về vấn đề xác định duy nhất đường cong chỉnh hình với mục tiêu là các siêu mặt di động ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese.

Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn, tôi đã nhận được sự dạy bảo tận tình của các thầy cô giáo ở trường Đại học Sư phạm - ĐH Thái Nguyên, ĐHSP Hà Nội, Viện Toán học. Đặc biệt là sự chỉ bảo, hướng dẫn tận tình của thầy giáo TS. Hà Trần Phương. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy, tới các thầy cô giáo đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua. Xin cảm ơn gia đình và các bạn bè đồng nghiệp đã giúp đỡ, động viên tôi hoàn thành bản luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2014

Tác giả

Vũ Thùy Thương

Chương 1

Mở đầu về lý thuyết phân bố giá trị cho đường cong chỉnh hình

1.1 Một số khái niệm cơ bản

1.1.1 Vị trí tổng quát của họ các siêu mặt

Trước tiên, ta nhắc lại một số khái niệm cơ bản trong giải tích phức. Trong suốt luận văn này ta luôn kí hiệu $\mathbb{C}$ là trường số phức, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là không gian xạ ảnh n chiều trên $\mathbb{C}$. Cho hàm chỉnh hình $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$, trong đó $G \subset \mathbb{C}$ là một miền mở. Điểm $z_0 \in G$ được gọi là không điểm bội k của g nếu tồn tại một hàm chỉnh hình $h(z)$ không triệt tiêu trong một lận cận U của z_0 sao cho trong lận cận U đó hàm g được biểu diễn dưới dạng

$$g(z) = (z - z_0)^k h(z).$$

Nghĩa là $g(z_0) = g'(z_0) = \cdots = g^{(k-1)}(z_0) = 0$ và $g^{(k)}(z_0) \neq 0$. Với $z \in \mathbb{C}$, ta kí hiệu

$$\mathrm{ord}_{g(z)} = \begin{cases} k & \text{nếu } z \text{ là không điểm bội } k \text{ của } g, \\ 0 & \text{nếu } g(z) \neq 0. \end{cases}$$

Chú ý rằng g là một hàm phân hình trên $\mathbb{C}$ thì $g = \dfrac{g_1}{g_2}$, trong đó g_1, g_2 là các hàm chỉnh hình không có không điểm chung. Số phức z_0 gọi là không điểm bội k của g nếu z_0 là không điểm bội k của g_1, z_0 gọi là cực điểm bội k của g nếu z_0 là không điểm bội k của g_2.

Bây giờ chúng ta nghiên cứu khái niệm về vị trí tổng quát của một họ siêu mặt. Kí hiệu $(z_0 : \cdots : z_n)$ là hệ tọa độ thuần nhất trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Một đơn thức bậc d sẽ có dạng

$$\mathbf{z}^{(\mathbf{i})} = z_0^{i_0} \dots z_n^{i_n},$$

trong đó $\mathbf{z} = (z_0 : \cdots : z_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và $(\mathbf{i}) = (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ thỏa mãn $\sigma(\mathbf{i}) = i_0 + \cdots + i_n = d$.

Giả sử D là một siêu mặt cố định bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, xác định bởi đa thức thuần nhất Q với các hệ số trong $\mathbb{C}$. Kí hiệu $n_d = \binom{n+d}{d} - 1$, khi đó n_d+1 là số các đơn thức $n+1$ biến bậc d. Gọi $\{(\mathbf{i}_0), \dots, (\mathbf{i}_{n_d})\}$ là tập các $(n+1)$-tuples các số nguyên không âm sao cho $\sigma(\mathbf{i}_j) = d,\ j = 0, \dots, n_d$, được sắp xếp theo thứ tự từ điển, nghĩa là $(\mathbf{i}_j) < (\mathbf{i}_l)$ với mỗi $j < l$. Khi đó

$$D = \Big\{(z_0 : \cdots : z_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) |\ Q(z_0, \dots, z_n) = 0\Big\},$$

trong đó $Q(\mathbf{z}) = Q(z_0, \dots, z_n) = \sum\limits_{j=0}^{n_d} a_j \mathbf{z}^{(\mathbf{i}_j)}$. Ta gọi

$$\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{n_d}) \in \mathbb{C}^{n_d+1} \backslash \{0\}$$

là vectơ liên kết với siêu mặt D.

Một siêu mặt di động D bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được cho như sau: với mỗi $z \in \mathbb{C}$, siêu mặt di động D sẽ cho một siêu mặt cố định

$$D(z) = \Big\{(z_0 : \cdots : z_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) |\ \sum_{j=0}^{n_d} a_j(z) \mathbf{z}^{(\mathbf{i}_j)} = 0\Big\},$$

trong đó $a_j,\ j = 0, \dots, n_d$, là các hàm nguyên không có không điểm chung. Ta gọi ánh xạ $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{n_d})$ là *ánh xạ liên kết* với siêu mặt D. Như vậy, mỗi siêu mặt di động D bậc d sẽ xác định một ánh xạ chỉnh hình $\mathbb{P}(\mathbf{a}) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^{n_d}(\mathbb{C})$. Ngược lại, mỗi một ánh xạ chỉnh hình khác hằng từ $\mathbb{C}$ vào $\mathbb{P}^{n_d}(\mathbb{C})$ cũng xác định cho ta một siêu mặt di động.

Với siêu mặt di động D bậc d, có ánh xạ liên kết $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{n_d})$, ta gọi

$$Q(\mathbf{z}) = Q(z_0, \dots, z_n) = \sum_{j=0}^{n_d} a_j(z) \mathbf{z}^{(\mathbf{i}_j)},$$

là *một dạng di động bậc d* xác định D. Nếu $d = 1$, ta gọi là *dạng tuyến tính di động*.

Định nghĩa 1.1 ([1]). Cho X là một đa tạp đại số có số chiều k ($1 \leqslant k \leqslant n$) trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và N là một số nguyên dương $N \geqslant k$. Một họ gồm $q > N$ siêu mặt cố định $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_q\}$ trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là ở vị trí N*-dưới tổng quát* đối với X nếu và chỉ nếu với mỗi bộ $i_1, \ldots, i_{N+1} \in \{1, \ldots, q\}$, ta luôn có

$$X \cap \bigcap_{j=1}^{N+1} \mathrm{supp}(D_{i_j}) = \emptyset.$$

Họ $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_q\}$ gồm q siêu mặt di động trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là ở vị trí N- *dưới tổng quát* đối với đa tạp X nếu $\{D_1(z), \ldots, D_q(z)\}$ ở vị trí $N-$ dưới tổng quát đối với đa tạp X với mỗi $z \in \mathbb{C}$.

Chú ý rằng, nếu $N = k$, khái niệm $N-$ dưới tổng quát được gọi là ở vị trí tổng quát đối với X.

Nhận xét. Họ các siêu phẳng $\{H_j,\ j = 1, \ldots, q\}$ ở vị trí tổng quát đối với $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ nếu $q > n$ và $n + 1$ siêu phẳng bất kỳ trong chúng đều là độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 1.2 ([13]). Một họ gồm $q > n_d$ các siêu mặt cố định $\{D_1, \ldots, D_q\}$ bậc d được gọi là *ở vị trí tổng quát tổng quát đối với phép nhúng Veronese* nếu với mỗi cách chọn các tập con chỉ số phân biệt $\{i_0, \ldots, i_{n_d}\}$ của $\{1, \ldots, q\}$, các vectơ $\mathbf{a}_{i_0}, \ldots, \mathbf{a}_{i_{n_d}}$ là độc lập tuyến tính, trong đó $\mathbf{a}_{i_k}$ là vectơ liên kết với D_{i_k} với mỗi $k = 0, \ldots, n_d$. Một họ gồm $q > n_d$ siêu mặt di động $D_1, \ldots, D_q$ bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là ở vị trí *tổng quát đối với phép nhúng Veronese* nếu với mỗi $z \in \mathbb{C}$, họ các siêu mặt $\{D_1(z), \ldots, D_q(z)\}$ ở vị trí tổng quát đối với phép nhúng Veronese.

Dễ dàng thấy rằng, trong trường hợp siêu phẳng, khái niệm ở vị trí tổng quát tổng quát đối với phép nhúng Veronese trùng với khái niệm ở vị trí tổng quát tổng quát thông thường.

1.1.2 Hàm đặc trưng và tính chất

Trong phần này chúng ta sẽ xem xét một số khái niệm về các hàm Nevanlinna-Cartan cho đường cong chỉnh hình.

Định nghĩa 1.3. Một *ánh xạ chỉnh hình từ* $\mathbb{C}$ *vào* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$*, hay còn gọi là đường cong chỉnh hình,* trong không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là ánh xạ

$$f = (f_0 : \cdots : f_n) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$
$$z \longmapsto (f_0(z) : \cdots : f_n(z)),$$

trong đó $f_j, 0 \leqslant j \leqslant n$, là các hàm nguyên trên $\mathbb{C}$.

Trường hợp đặc biệt, nếu các hàm $f_0, \ldots, f_n$ là các hàm nguyên, không có không điểm chung trên $\mathbb{C}$ thì ta gọi ánh xạ

$$\mathbf{f} = (f_0, \ldots, f_n) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$$

là một *biểu diễn tối giản* của f.

Từ định nghĩa ta dễ dàng suy ra:

Mệnh đề 1.1. *Cho* $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *là hai đường cong chỉnh hình khác hằng và* $(f_0, \ldots, f_n)$, $(g_0, \ldots, g_n)$ *lần lượt là các biểu diễn tối giản của* f, g. *Khi đó* $f \equiv g$ *nếu và chỉ nếu* $f_i g_j \equiv f_j g_i$ *với mọi cặp chỉ số phân biệt* $i, j \in \{0, \ldots, n\}$.

Định nghĩa 1.4. Đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ được gọi là *suy biến tuyến tính* nếu ảnh của f chứa trong một đa tạp tuyến tính thực sự nào đó của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Đường cong f được gọi là *suy biến đại số* nếu ảnh của f chứa trong một đa tạp con đại số thực sự nào đó của $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Tiếp theo ta định nghĩa hàm đặc trưng, hàm xấp xỉ, hàm đếm của đường cong kết hợp với các siêu mặt cố định hay di động.

Định nghĩa 1.5. ([1]) Cho đường cong chỉnh hình $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ và một biểu diễn tối giản $(f_0, \ldots, f_n)$ của f. Hàm

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \|f(re^{i\theta})\| d\theta$$

được gọi là *hàm đặc trưng Nevanlinna-Cartan* (hay hàm độ cao Cartan) của f, trong đó

$$\|f(z)\| = \max\{|f_0(z)|, \ldots, |f_n(z)|\}.$$

Bổ đề 1.2. ([10]) *Giả sử $f = (f_0 : \cdots : f_n) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ là một đường cong chỉnh hình khác hằng, khi đó*

$$N_{f_j}(r, 0) \leqslant T_f(r) + O(1)$$

với mỗi $j = 0, \ldots, n$, trong đó $N_{f_j}(r, 0)$ là hàm đếm tại các không điểm của hàm f_j.

Với siêu mặt di động D bậc d, có ánh xạ liên kết $\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_{n_d})$, ta định nghĩa

$$T_D(r) = T_{\mathbb{P}(\mathbf{a})}(r).$$

Bây giờ ta định nghĩa hàm xấp xỉ (hàm bù) cho đường cong chỉnh hình kết hợp với các siêu mặt. Giả sử D là một siêu mặt (cố định hay di động) bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, xác định bởi đa thức thuần nhất Q.

Định nghĩa 1.6 ([1]). Hàm

$$m_f(r, D) = m_f(r, Q) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\|f(re^{i\theta})\|^d}{|Q(f)(re^{i\theta})|} d\theta$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của f kết hợp với siêu mặt D.

Tiếp theo ta định nghĩa các hàm đếm cho cho đường cong chỉnh hình kết hợp với các siêu mặt. Giả sử D là một siêu mặt cố định bậc d trong $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, xác định bởi đa thức thuần nhất Q. Kí hiệu $n_f(r, D)$ là số không điểm của $Q \circ f$ trong đĩa $|z| < r$, kể cả bội, $n_f^{\Delta}(r, D)$ là số các không điểm $Q \circ f$ trong đĩa $|z| < r$, bội cắt cụt bởi một số nguyên dương Δ. Nghĩa là

$$n_f(r, D) = \sum_{z \in \mathbb{C}, |z| < r} \mathrm{ord}_{Q \circ f}(z);$$
$$n_f^{\Delta}(r, D) = \sum_{z \in \mathbb{C}, |z| < r} \min\{\Delta, \mathrm{ord}_{Q \circ f}(z)\}.$$