ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐÀO MINH PHƯƠNG

ĐỊNH LÝ CƠ BẢN THỨ HAI CHO ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH *P*-ADIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐÀO MINH PHƯƠNG

ĐỊNH LÍ CƠ BẢN THỨ HAI CHO ĐƯỜNG CONG CHỈNH HÌNH *P*-ADIC

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. HÀ TRẦN PHƯƠNG

Thái Nguyên - Năm 2014

Mục lục

Lời nói đầu

Lý thuyết Nevanlinna được đánh giá như là một trong những thành tựu sâu sắc và đẹp đẽ nhất của toán học trong thế kỷ XX. Được hình thành từ những năm đầu của thế kỷ XX, lý thuyết Nevanlinna bắt đầu bằng những công trình của Hadamard, Borel và ngày càng có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học. Lý thuyết Nevanlinna nghiên cứu sự phân bố giá trị của các hàm phân hình trên $\mathbb{C}$. Trung tâm của lý thuyết là hai định lý cơ bản. Định lý cơ bản thứ nhất, một cách viết khác của công thức Poisson-Jensen, cho thấy quan hệ giữa hàm đặc trưng $T_f(r)$ của hàm phân hình f với hàm đặc trưng $T_f(r, a)$ của hàm $\frac{1}{f-a}$. Định lý cơ bản thứ hai thể hiện những kết quả đẹp và sâu sắc nhất của lý thuyết, được phát biểu dưới nhiều dạng khác nhau: quan hệ giữa hàm đặc trưng với các hàm đếm, các hàm đếm bội cắt cụt, các hàm xấp xỉ, ...

Một vấn đề tự nhiên được các nhà toán học đặt ra là: nghiên cứu lý thuyết Nevanlinna chiều cao, tức là xét phân bố giá trị cho ánh xạ chỉnh hình giữa các đa tạp trên $\mathbb{C}$. Đầu tiên phải kể tới những công trình của H. Cartan ([3]) công bố vào năm 1933. Về sau, việc tiếp tục phát triển lý thuyết phân bố giá trị cho ánh xạ chỉnh hình và nghiên cứu các ứng dụng của lý thuyết đó trong các lĩnh vực khác nhau của toán học phát triển mạnh mẽ và thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới.

Kí hiệu $\mathbb{C}_p$ là trường các số phức $p-$adic, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_p)$ là không gian xạ ảnh n chiều trên trường $\mathbb{C}_p$. Song song với việc nghiên cứu phân bố giá trị cho các ánh xạ chỉnh hình trên $\mathbb{C}$, hiện nay cũng có nhiều nhà toán học nghiên cứu phân bố giá trị cho các ánh xạ chỉnh hình trên $\mathbb{C}_p$. Những công trình đầu tiên thuộc về H. H. Khoai ([9]), H. H. KHoai và M.V. Quang ([10]), H. H. Khoai và M. V. Tu ([11]). Về sau, việc tiếp tục phát triển lý thuyết này cũng thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học: M. Ru, W. Cherry, T. T. H. An, V. H. An và nhiều nhà toán học khác.

Với mong muốn tìm hiểu nghiên cứu theo hướng này, chúng tôi chọn đề tài **Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình $p-$adic** . Mục đích chính của luận văn là hệ thống lại một số dạng định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình và trình bày lại một số kết quả về vấn đề duy nhất cho đường cong chỉnh hình trong trường hợp siêu mặt di động.

Luận văn gồm hai chương:

Chương 1: Định lý cơ bản thứ hai cho hàm phân hình $p-$adic. Trong chương này chúng tôi trình bày các kiến thức cơ sở về lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình $p-$adic.

Chương 2: Định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình $p-$adic. Trong chương này, chúng tôi trình bày các nghiên cứu về các dạng định lý cơ bản thứ hai kiểu Cartan không kể bội và bội cắt cụt cho đường cong chỉnh hình $p-$adic.

Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn, tôi đã nhận được sự dạy bảo tận tình của các thầy cô giáo ở trường Đại học Sư phạm - ĐH Thái Nguyên, ĐHSP Hà Nội, Viện Toán học. Đặc biệt là sự chỉ bảo, hướng dẫn tận tình của thầy giáo TS. Hà Trần Phương. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy, tới các thầy cô giáo đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua. Xin cảm ơn gia đình và các bạn bè đồng nghiệp đã giúp đỡ, động viên tôi hoàn thành bản luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2014

Tác giả

Đào Minh Phương

Chương 1

Định lý cơ bản thứ hai cho hàm phân hình $p-$adic

1.1 Hàm phân hình $p-$adic

1.1.1 Trường các số $p-$adic

Cho $\mathbb{C}_p$ là một trường, kí hiệu $\mathbb{C}_p^* = \mathbb{C}_p - \{0\}$. Một *giá trị tuyệt đối* trên $\mathbb{C}_p$ là hàm

$$|.| : \mathbb{C}_p \longrightarrow \mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$$

thỏa mãn các điều kiện

1. $|x| = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$;
2. $|xy| = |x|.|y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{C}_p$;
3. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ với mọi $x, y \in \mathbb{C}_p$.

Ta gọi giá trị tuyệt đối này là *giá trị tuyệt đối Acsimet*. Nếu $|.|$ thỏa mãn thêm điều kiện

4. $|x + y| \leqslant \max\{|x|, |y|\}$ với mọi $x, y \in \mathbb{C}_p$

thì ta gọi là được gọi là *giá trị tuyệt đối không Acsimet*.

Ta biết, giá trị tuyệt đối thông thường trên $\mathbb{Q}$ là Acsimet. Bây giờ ta xây dựng giá trị tuyệt đối không Acsimet trên $\mathbb{Q}$. Lấy $p \in \mathbb{Z}$ là một số nguyên tố, khi đó mỗi số nguyên $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng:

$$a = p^v.a', \quad p \not| a',\ a' \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

Ta kí hiệu $v_p(a) = v$, khi đó chúng ta thu được hàm

$$v_p : \mathbb{Z} - \{0\} \to \mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap [0; +\infty).$$

Ta mở rộng v_p lên $\mathbb{Q}$ như sau: nếu $x = a/b \in \mathbb{Q}$, đặt

$$v_p(x) = \begin{cases} v_p(a) - v_p(b) & : x \neq 0 \\ +\infty & : x = 0. \end{cases}$$

Hàm v_p được gọi là hàm giá trị p-adic trên $\mathbb{Q}$, nó có tính chất:

$$x = p^{v_p(x)}.\frac{a'}{b'}, \quad p \nmid a'b',\ x \in \mathbb{Q}.$$

Khi đó, ta có hàm $|.|_p$ xác định trên $\mathbb{Q}$ như sau:

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & : x \in \mathbb{Q}, x \neq 0 \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

Ta dễ dàng chứng minh được

Mệnh đề 1.1. *Hàm $|.|_p$ là một giá trị tuyệt đối không Acsimet trên $\mathbb{Q}$.*

Giá trị tuyệt đối $|.|_p$ trên $\mathbb{Q}$ xác định như trên được gọi là *giá trị tuyệt đối $p-$adic*. Ta kí hiệu $|.|_\infty$ là giá trị tuyệt đối thông thường trên $\mathbb{Q}$. Định lý sau đây cho thấy một tính chất về các giá trị tuyệt đối trên $\mathbb{Q}$.

Định lý 1.2 (Định lý Ostrowski). *Mọi giá trị tuyệt đối không tầm thường trên $\mathbb{Q}$ là tương đương với một trong các giá trị tuyệt đối $|.|_p$, với p hoặc là số nguyên tố hoặc là $p = \infty$.*

Bây giờ ta cố định một số nguyên tố p, bổ sung đủ của $\mathbb{Q}$ theo tôpô sinh bởi giá trị tuyệt đối $|.|_p$ là một trường kí hiệu là $\mathbb{Q}_p$, giá trị tuyệt đối $|.|_p$ trên $\mathbb{Q}_p$ được mở rộng từ giá trị tuyệt đối $|.|_p$ trên $\mathbb{Q}$, nó thỏa mãn:

1. Tồn tại một phép nhúng $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ và giá trị tuyệt đối $|.|_p$ trên $\mathbb{Q}_p$ nhận được bằng cách mở rộng giá trị tuyệt đối $|.|_p$ trên $\mathbb{Q}$;

2. $\mathbb{Q}$ trù mật trong $\mathbb{Q}_p$;

3. $\mathbb{Q}_p$ là đầy đủ.

Trường $\mathbb{Q}_p$ thỏa mãn ba điều kiện trên tồn tại một cách duy nhất, sai khác một phép đẳng cự, được gọi là *trường các số p−adic*. Trường $\mathbb{Q}_p$ có tính chất: với mỗi $x \in \mathbb{Q}_p^*$, tồn tại một số nguyên $v_p(x)$ sao cho

$$|x|_p = p^{-v_p(x)},$$

tức là hàm v_p trên $\mathbb{Q}$ được mở rộng lên $\mathbb{Q}_p$. Nói cách khác tập các giá trị tuyệt đối của $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{Q}_p$ là như nhau dưới hàm $|.|_p$, nó chính là tập

$$\{p^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}.$$

Vành $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leqslant 1\}$ là tập vừa đóng, vừa mở, được gọi là *vành các số nguyên p−adic*. Vành $\mathbb{Z}_p$ là compact và $\mathbb{Q}_p$ compact địa phương.

Bao đóng đại số của $\mathbb{Q}_p$ kí hiệu là $\overline{\mathbb{Q}}_p$, giá trị tuyệt đối trên $\overline{\mathbb{Q}}_p$ được mở rộng từ giá trị tuyệt đối $|.|_p$ trên $\mathbb{Q}_p$ và cũng kí hiệu là $|.|_p$. Chú ý rằng $\overline{\mathbb{Q}}_p$ không đầy đủ. Trường bổ sung đủ của $\overline{\mathbb{Q}}_p$ theo tôpô cảm sinh bởi giá trị tuyệt đối $|.|_p$, kí hiệu là $\mathbb{C}_p$. Như vậy:

1. Tồn tại một phép nhúng $\overline{\mathbb{Q}}_p \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ và giá trị tuyệt đối $|.|_p$ trên $\mathbb{C}_p$ nhận được bằng cách mở rộng giá trị tuyệt đối $|.|_p$ trên $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Ta đồng nhất $\overline{\mathbb{Q}}_p$ với ảnh của nó trong $\mathbb{C}_p$ (dưới ánh xạ nhúng);

2. $\overline{\mathbb{Q}}_p$ trù mật trong $\mathbb{C}_p$;

3. $\mathbb{C}_p$ là đầy đủ.

Trường $\mathbb{C}_p$ thỏa mãn ba điều kiện trên tồn tại một cách duy nhất, sai khác một phép đẳng cự, được gọi là *trường các số phức p−adic*. Nó cũng có tính chất:

1. Với mỗi $x \in \mathbb{C}_p^*$, tồn tại một số hữu tỷ $v_p(x)$ sao cho $|x|_p = p^{-v_p(x)}$, tức là hàm giá trị liên kết v_p trên $\overline{\mathbb{Q}}_p$ được mở rộng lên $\mathbb{C}_p$ và ảnh của $\mathbb{C}_p^*$ dưới ánh xạ v_p chính là $\mathbb{Q}^*$.

2. $\mathbb{C}_p$ đầy đủ, đóng đại số có đặc số không, nhưng không compact địa phương.

1.1.2 Hàm sinh bởi chuỗi lũy thừa

Bây giờ ta nghiên cứu hàm $p-$adic sinh bởi chuỗi lũy thừa, trước hết ta nhắc lại một số kiến thức về dãy và chuỗi lũy thừa $p-$adic.

Cố định một số nguyên tố p. Từ nay về sau, ta luôn kí hiệu $|.|$ thay cho $|.|_p$ trên $\mathbb{C}_p$ để cho đơn giản. Một dãy $\{a_n\}$ trong $\mathbb{C}_p$ là dãy Cauchy nếu

$$\lim_{m,n\longrightarrow\infty} |a_m - a_n| = 0.$$

Ta dễ dàng chứng minh các tính chất sau đây, cho thấy sự khác biệt giữa dãy, chuỗi số phức và $p-$adic.

Mệnh đề 1.3. *Dãy $\{a_n\}$ trong $\mathbb{C}_p$ là dãy Cauchy nếu và chỉ nếu*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0.$$

Hệ quả 1.4. *Chuỗi vô hạn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ với $a_n \in \mathbb{C}_p$ là hội tụ khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$, trong trường hợp này ta có*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leqslant \max_n |a_n|. \tag{1.1}$$

Bây giờ ta xem xét sự hội tụ của chuỗi lũy thừa $p-$adic

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (a_n \in \mathbb{C}_p). \tag{1.2}$$

Theo Hệ quả 1.4, chuỗi (1.2) hội tụ tại những $z \in \mathbb{C}_p$ mà $|a_n z^n| \to 0$ khi $n \to \infty$. Bán kính hội tụ ρ của chuỗi (1.2) được tính bởi công thức

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\longrightarrow\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Nếu $0 < \rho < +\infty$ thì chuỗi hội tụ với $|z| < \rho$ và phân kỳ với $|z| > \rho$. Nếu $\rho = 0$ (tương ứng, $\rho = +\infty$) thì chuỗi chỉ hội tụ tại $z = 0$ (tương ứng, trên $\mathbb{C}_p$).

Cho $U \subset \mathbb{C}_p$ là tập mở. Hàm $f : U \to \mathbb{C}_p$ được gọi là *liên tục tại* $z_0 \in U$ nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $z \in \mathbb{C}_p(z_0; \delta)$, ta có

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Hàm f gọi là *khả vi tại* z_0 nếu giới hạn

$$f'(z_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

tồn tại hữu hạn. f được gọi là *khả vi trên* U nếu nó khả vi tại mỗi điểm của U. Ta có thể chứng minh dễ dàng được rằng hàm khả vi thì liên tục.

Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $(a_n \in \mathbb{C}_p)$ có bán kính hội tụ là ρ $(0 < \rho \leqslant +\infty)$. Với mỗi $z \in \mathbb{C}_p(0;\rho)$, đặt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1.3}$$

Khi đó ta được một hàm giá trị $p-$adic f xác định trên $\mathbb{C}_p(0;\rho)$. Cũng giống như trong trường hợp phức, ta có thể chứng minh được một cách dễ dàng hàm f định nghĩa bởi chuỗi luỹ thừa liên tục trong $\mathbb{C}_p(0;\rho)$ và có thể mở rộng thành $\mathbb{C}_p[0;\rho]$ nếu $|a_n|\rho^n \to 0$ khi $n \to \infty$.

Giả sử chuỗi lũy thừa $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ có bán kính hội tụ là ρ $(0 < \rho \leqslant +\infty)$. Với mỗi số thực $r : 0 < r < \rho$. Ta định nghĩa *số hạng lớn nhất* bởi

$$\mu(r, f) = \max_{n \geqslant 0} |a_n| r^n$$

và *chỉ số trung tâm*

$$\nu(r, f) = \max_{n \geqslant 0} \{n : |a_n| r^n = \mu(r, f)\}.$$

Mệnh đề 1.5. *Ta có các tính chất sau:*

1. *Với mỗi* $r : 0 < r < \rho$, $\mu(r, f)$ *luôn tồn tại hữu hạn.*

2. *Hàm* $\mu(r, f)$ *liên tục theo* r.

3. *Với mỗi* r, *chỉ số trung tâm* $\nu(r, f)$ *luôn tồn tại hữu hạn và là một số nguyên không âm. Theo định nghĩa ta có* $\mu(r, f) = |a_{\nu(r,f)}| r^{\nu(r,f)}$.

4. *Hiển nhiên, nếu* $z \in \mathbb{C}_p$ *mà* $|z| \leqslant r$ *thì*

$$|f(z)| \leqslant \max_{n \geqslant 0} |a_n||z|^n \leqslant \max_{n \geqslant 0} |a_n| r^n = \mu(r, f).$$

Ta kí hiệu

$$\mu(0, f) = \lim_{r \longrightarrow 0^+} \mu(r, f), \quad \nu(0, f) = \lim_{r \longrightarrow 0^+} \nu(r, f).$$