ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐOÀN THỊ THU THẢO

F-MÔĐUN SUY RỘNG VÀ TẬP IĐÊAN NGUYÊN TỐ LIÊN KẾT CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

CHUYÊN NGÀNH: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan các kết quả nghiên cứu được trình bày trong luận văn này là hoàn toàn trung thực, chưa được sử dụng cho bảo vệ một học vị nào. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn đã được sự đồng ý của các cá nhân và tổ chức. Các thông tin, tài liệu trình bày trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2013

Học viên

Đoàn Thị Thu Thảo

Xác nhận
của trưởng khoa chuyên môn

Xác nhận
của người hướng dẫn khoa học

TS. Nguyễn Thị Dung

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến T.S Nguyễn Thị Dung, người đã trực tiếp chỉ bảo, dìu dắt, tận tình hướng dẫn và tạo mọi điều kiện cho tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, Phòng Đào tạo sau Đại học, các thầy giáo Viện toán học Hà Nội và các thầy cô giáo Khoa Toán trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã giảng dạy, giúp đỡ cho tôi trong quá trình học tập và thực hiện đề tài này.

Cuối cùng tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến gia đình, bạn bè, người thân và tất cả những ai giúp đỡ, động viên tôi trong quá trình học tập.

Mục lục

Mở đầu

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương Noether và M là R-môđun hữu hạn sinh với chiều $\dim M = d$. N. T. Cường, N. V. Trung và P. Schenzel [CST] đã giới thiệu khái niệm dãy lọc chính quy (f-dãy) như là mở rộng của dãy chính quy quen biết, và đồng thời họ cũng đưa ra lớp môđun thỏa mãn mọi hệ tham số đều là dãy lọc chính quy được gọi là *f-môđun*. Cũng trong bài báo đó, họ giới thiệu một lớp môđun thỏa mãn $l(H_I^i(M)) < \infty$, với mọi $i < d$ được gọi là môđun *Cohen-Macaulay suy rộng*. Nhìn chung, mọi môđun Cohen-Macaulay suy rộng đều là *f-môđun* và điều ngược lại cũng đúng khi R là vành thương của vành Cohen-Macaulay. Cấu trúc của *f-môđun* và môđun Cohen-Macaulay suy rộng đã được nhiều nhà toán học nghiên cứu và ngày nay các lớp môđun này đã trở nên quen thuộc trong Đại số giao hoán và có nhiều ứng dụng trong Hình học đại số.

Tiếp theo, năm 2005, ý tưởng mở rộng khái niệm f-dãy thuộc về L. T. Nhàn [N]: Một dãy các phần tử $x_1, \ldots, x_r$ trong $\mathfrak{m}$ được gọi là một *dãy chính quy suy rộng* của M nếu $x_i \notin \mathfrak{p}$, với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$ thỏa mãn $\dim R/\mathfrak{p} > 1$, với mọi $i = 1, \ldots, r$. Cho I là iđêan của R sao cho $\dim M/IM > 1$. Khi đó, khái niệm *độ sâu suy rộng* của M trong I, ký hiệu là $\operatorname{gdepth}(I; M)$, cũng được định nghĩa một cách tự nhiên là độ dài cực đại của một dãy chính quy suy rộng của M trong I. Dãy chính quy suy rộng và độ sâu suy rộng vẫn còn có nhiều tính chất đẹp và cung cấp một số thông tin hữu ích về tính hữu hạn của tập các iđêan nguyên tố liên kết. Chẳng hạn, tập $\bigcup\limits_{t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{N}} \operatorname{Ass}(M/(x_1^{t_1}, \ldots, x_n^{t_n})M)$ là hữu hạn với mỗi $x_1, \ldots, x_n$ là dãy chính quy suy rộng của M. Hơn thế nữa, nếu độ sâu suy rộng của M trong I là $\operatorname{gdepth}(I, M) = r$ thì r chính là số nguyên i nhỏ nhất sao cho tập $\operatorname{Supp}(H_I^i(M))$ là vô hạn, và tập $\operatorname{Ass}(H_I^r(M))$ là hữu hạn (xem [N]).

Một cách tự nhiên, từ khái niệm dãy chính quy suy rộng, L. T. Nhàn và

M. Morales [NM] đã nghiên cứu lớp môđun gọi là *f-môđun suy rộng* thỏa mãn điều kiện mọi hệ tham số là dãy chính quy suy rộng. Họ đã chứng tỏ rằng f-môđun suy rộng vẫn có nhiều tính chất tốt tương tự với một số tính chất của f-môđun và môđun Cohen-Macaulay suy rộng.

Mục đích của luận văn này là trình bày và chứng minh lại chi tiết bài báo *"Generalized F-modules and the associated primes of local cohomology modules"* của L. T. Nhàn và M. Morales đăng trên tạp chí *Communication in Algebra,* năm 2006.

Luận văn được chia thành hai chương. Chương 1 dành để nhắc lại một số kiến thức cơ sở có liên quan đến nội dung của luận văn như tập iđêan nguyên tố liên kết, hệ tham số, số bội, môđun đối đồng điều địa phương,... Để theo dõi một cách tương đối hệ thống, Mục 1.4 của Chương 1 nhắc lại khái niệm dãy chính quy, dãy chính quy lọc, dãy chính quy suy rộng và tương ứng là các lớp môđun Cohen-Macaulay, f-môđun và một số tính chất của chúng.

Nội dung chính của luận văn nằm ở Chương 2: Khái niệm f-môđun suy rộng; đặc trưng của f-môđun suy rộng thông qua hệ tham số của M, địa phương hóa và tính catenary, tính đẳng chiều tới các thành phần nguyên sơ có chiều > 1 của tập support của M; số bội và môđun đối đồng điều địa phương; Nếu vành R có phức đối ngẫu thì lớp f-môđun suy rộng chính là lớp môđun có quỹ tích không Cohen-Macaulay có chiều lớn nhất là 1 và tất cả iđêan nguyên tố tối thiểu đều có hoặc chiều d hoặc chiều 1; Tính hữu hạn của tập iđêan nguyên tố liên kết của một số môđun đối đồng điều địa phương của một f-môđun suy rộng. Kết quả này là mở rộng các kết quả của Hellus [H, Định lý 4] và Asadollahi-Schenzel [AS, Định lý 1.1].

Phần kết luận của luận văn tổng kết lại các kết quả đã trình bày.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, ta luôn kí hiệu R là vành giao hoán, Noether và M là R-môđun. Chương này dành để nhắc lại một số kiến thức cơ sở liên quan đến các kết quả của luận văn ở các chương sau như tập iđêan nguyên tố liên kết, hệ tham số, số bội, môđun đối đồng điều địa phương,...

1.1 Tập iđêan nguyên tố liên kết

Định nghĩa 1.1.1. (i) Giả sử M là một R-môđun. Một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R được gọi là *iđêan nguyên tố liên kết* của M nếu tồn tại phần tử $0 \neq x \in M$ sao cho $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(x)$.
(ii) Môđun con Q của M được gọi là *môđun con nguyên sơ* của M nếu $M/Q \neq 0$ và với mỗi $a \in ZD(M/Q)$, tồn tại $n \in N$ sao cho $a^n(M/Q) = 0$. Khi đó $\mathfrak{p} = \sqrt{\operatorname{Ann}_R(M/Q)}$ là một iđêan nguyên tố của R, ta nói Q là một môđun con $\mathfrak{p}$-*nguyên sơ* của M.
(iii) Cho N là môđun con của R môđun M ta nói N có *phân tích nguyên sơ* nếu tồn tại các môđun con nguyên sơ Q_i với $i = 1, \ldots, n$, sao cho $N = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ thành giao của hữu hạn các môđun con $\mathfrak{p}_i$-nguyên sơ. Nếu $N = 0$ hoặc $N \neq 0$ có một phân tích nguyên sơ thì ta nói N là *phân tích được*. Phân tích nguyên sơ này được gọi là *tối thiểu (thu gọn)* nếu các

iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_i$ là đôi một khác nhau và không có hạng tử Q_i nào là thừa, nghĩa là với mọi $i = 1, \ldots, n$

$$Q_j \not\supseteq \bigcap_{i=1; i\neq j}^{n} Q_i.$$

(iv) Dễ thấy rằng mọi phân tích nguyên sơ của N đều có thể đưa được về dạng thu gọn. Khi đó tập hợp $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ là độc lập với việc chọn phân tích nguyên sơ tối thiểu của N và được gọi là *tập các iđêan nguyên tố liên kết* của M/N, kí hiệu bởi $\operatorname{Ass}_R M/N$. Các hạng tử $Q_i, i = 1, \ldots, n$, được gọi là các thành phần nguyên sơ của N. Nếu $\mathfrak{p}_i$ là tối thiểu trong $\operatorname{Ass}_R M/N$ thì Q_i được gọi là *thành phần cô lập,* ngược lại thì Q_i được gọi là *thành phần nhúng*.

Một dãy $(x_n) \subseteq R$ được gọi là một *dãy Cauchy theo tôpô* $\mathfrak{m}$*-adic* nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $x_n - x_m \in \mathfrak{m}^k$ với mọi $n, m \geq n_0$. Dãy $(x_n) \subseteq R$ được gọi là *dãy không* nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước, tồn tại số n_0 sao cho $x_n \in \mathfrak{m}^k$ với mọi $n \geq n_0$. Ta trang bị quan hệ tương đương trên tập các dãy Cauchy như sau: Hai dãy Cauchy $(x_n), (y_n)$ được gọi là *tương đương* nếu dãy $(x_n - y_n)$ là dãy không. Kí hiệu $\widehat{R}$ là tập các lớp tương đương. Chú ý rằng quy tắc cộng $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ và quy tắc nhân $(x_n)(y_n) = (x_n y_n)$ không phụ thuộc vào cách chọn các đại diện của các lớp tương đương. Vì thế nó là các phép toán trên $\widehat{R}$ và cùng với hai phép toán này, $\widehat{R}$ làm thành một vành Noether địa phương với iđêan tối đại duy nhất là $\mathfrak{m}\widehat{R}$. Vành $\widehat{R}$ vừa xây dựng được gọi là vành đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic của R.

Một dãy $(z_n) \subseteq M$ được gọi là *dãy Cauchy theo tôpô* $\mathfrak{m}$*-adic* nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $z_n - z_m \in \mathfrak{m}^k M$ với mọi $n, m \geq n_0$. Từ khái niệm dãy Cauchy như trên, tương tự ta định nghĩa được khái niệm *môđun đầy đủ theo tôpô* $\mathfrak{m}$*-adic* trên vành $\widehat{R}$. Môđun này được kí hiệu là $\widehat{M}$.

Mệnh đề sau cho ta một số tính chất của tập iđêan nguyên tố liên kết, (xem [MAT, Định lý 6.1, Định lý 6.3, Định lý 6.5]).

Mệnh đề 1.1.2. *Ta có các khẳng định sau:*

(i) Iđêan $\mathfrak{p}$ là một iđêan nguyên tố liên kết của M nếu và chỉ nếu M chứa một môđun con đẳng cấu với $R/\mathfrak{p}$.

(ii) Cho $\mathfrak{p}$ là phần tử tối đại của tập các iđêan có dạng $\operatorname{Ann}(x)$, trong đó $0 \neq x \in M$. Khi đó $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$. Vì thế, $M \neq 0$ khi và chỉ khi $\operatorname{Ass}_R(M) \neq \emptyset$. Hơn nữa, tập $ZD(M)$ các ước của không của M chính là hợp của các iđêan nguyên tố liên kết của M.

(iii) Cho dãy khớp ngắn các R-môđun

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Khi đó

$$\operatorname{Ass} M' \subseteq \operatorname{Ass} M \subseteq \operatorname{Ass}_R M' \cup \operatorname{Ass} M''.$$

(iv) Nếu M là R-môđun hữu hạn sinh thì khi đó ta có $\operatorname{Ass} M$ là tập hữu hạn, $\operatorname{Ass} M \subseteq \operatorname{Supp} M$ và $V(\operatorname{Ann} M) = \operatorname{Supp}_R M$. Hơn nữa, các phần tử tối thiểu của $\operatorname{Ass} M$ và $\operatorname{Supp} M$ là như nhau.

(v) $\operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} : \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_R(M), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$.

(vi) $\operatorname{Ass}_R M = \{\widehat{\mathfrak{p}} \cap R : \widehat{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{M}\}$.

(vii) $\operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{M} = \bigcup\limits_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M} \operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{M}/\mathfrak{p}\widehat{M}$.

1.2 Hệ tham số và số bội

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, Noether và M là R- môđun hữu hạn sinh với chiều Krull $\dim M = d$, (xem [MAT]).

Định nghĩa 1.2.1. (i) Một hệ $\underline{x} := (x_1, \ldots, x_d) \in \mathfrak{m}$ được gọi là *một hệ tham số* của M nếu $\ell(M/(\underline{x})M) < \infty$.

(ii) Nếu $\underline{x} \in \mathfrak{m}$ là một hệ tham số của M thì các phần tử $(x_1, \ldots, x_i)$ được gọi là *một phần hệ tham số*, với mọi $i = 1, \ldots, d$.

Mệnh đề sau đây cho ta một số tính chất cơ bản của hệ tham số, (xem [MAT, Định lý 14.1, Định lý 14.2]).

Mệnh đề 1.2.2. *(i) Nếu $\underline{x}$ là một hệ tham số của M và $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ là một bộ gồm d số nguyên dương thì $\underline{x}(\underline{n}) = (x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})$ cũng là hệ tham số của M.*

(ii) Cho $x_1, \ldots, x_t$ là một dãy các phần tử của $\mathfrak{m}$, với $t \leqslant d$. Khi đó,

$$\dim(M/(x_1, \ldots, x_t)M) \geqslant \dim M - t.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1, \ldots, x_t$ là một phần hệ tham số của M.

(iii) Hệ $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathfrak{m}$ là một hệ tham số của M khi và chỉ khi $x_i \notin \mathfrak{p}$, với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$ thỏa mãn $\dim R/\mathfrak{p} = d - i + 1$. Đặc biệt, một phần tử $x \in \mathfrak{m}$ là phần tử tham số của M khi và chỉ khi $x \notin \mathfrak{p}$, với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ sao cho $\dim R/\mathfrak{p} = d$.

(iv) Nếu $\underline{x}$ là một hệ tham số của M thì $\underline{x}$ cũng là hệ tham số của $\widehat{M}$, trong đó $\widehat{M}$ là tôpô đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic của M.

Định nghĩa 1.2.3. Cho I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của R. M là R-môđun hữu hạn sinh. Ta có $\ell_R(M/I^{n+1}M) = P_{M,I}(n)$ với n đủ lớn, trong đó $\deg P_{M,I}(n) = d$. Khi đó tồn tại các số nguyên $e_0, e_1, \ldots, e_d, e_0 > 0$ sao cho

$$P_{M,I}(n) = e_0\binom{n+d}{d} - e_1\binom{n+d-1}{d-1} + \ldots + (-1)^d e_d.$$

Các số $e_0, \ldots, e_d$ gọi là hệ số Hilbert của M đối với I kí hiệu là $e_i(I, M)$. Đặc biệt, số nguyên dương e_0 trong biểu diễn trên được gọi là số bội của M đối với I. Kí hiệu là $e(I, M)$.