ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

DƯƠNG THỊ GIANG

MÔĐUN COHEN-MACAULAY VỚI CHIỀU > s VÀ MỘT SỐ KẾT QUẢ TRÊN MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

2013

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là hoàn toàn trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Nguồn tài liệu sử dụng cho việc hoàn thành luận văn đã được sự đồng ý của cá nhân và tổ chức. Các thông tin, tài liệu trong luận văn này đã được ghi rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2013

Học viên

Dương Thị Giang

Xác nhận
của trưởng khoa chuyên môn

Xác nhận
của người hướng dẫn khoa học

TS. Nguyễn Thị Dung

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành sau 2 năm học tập tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Với lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tôi xin được bày tỏ lời cảm ơn chân thành tới **Tiến sĩ Nguyễn Thị Dung**, người cô kính mến đã hết lòng giúp đỡ, dạy bảo, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên, lãnh đạo khoa Toán, lãnh đạo khoa Sau đại học của Trường đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tôi hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập của mình.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô đã tham gia giảng dạy cho lớp Cao học chuyên ngành Toán khoá 19.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn những người thân yêu trong gia đình, bạn bè đã luôn cho tôi niềm tin và động lực để học tập tốt.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2013

Học viên

Dương Thị Giang

Mục lục

Trang

Mở đầu

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương, $\mathfrak{a}$ là một iđêan của R, M là R-môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d$ và cho $s \geqslant -1$ là một số nguyên. Khái niệm M-dãy với chiều $> s$ đã được đưa ra bởi Brodmann-Nhàn [BN] như là một sự mở rộng của khái niệm dãy chính quy suy rộng được giới thiệu bởi Nhàn [N] trước đó. Với khái niệm này, các khái niệm dãy chính quy, f-dãy quen biết và dãy chính quy suy rộng đã tương ứng trở thành các M-dãy với chiều $> -1, 0, 1$ (xem [BN], [CST], [N],...). Năm 2009, dùng khái niệm M-dãy với chiều $> s$, N. Zamani [NZ] đã giới thiệu khái niệm lớp môđun thỏa mãn mọi hệ tham số là M-dãy với chiều $> s$ và gọi là môđun *Cohen-Macaulay với chiều* $> s$. Khi đó, các lớp môđun quen biết trong đại số giao hoán là Cohen-Macaulay, f-môđun giới thiệu bởi Cường-Schenzel-Trung [CST], f-môđun suy rộng đưa ra bởi Nhàn-Morales [NM] tương ứng trở thành các trường hợp đặc biệt của môđun Cohen-Macaulay với chiều $> -1, 0, 1$.

Luận văn nhằm trình bày lại các kết quả và chứng minh chi tiết bài báo của N. Zamani [NZ] "*Cohen-Macaulay Modules in Dimension* $> s$ *and Results on Local Cohomology*" đăng trên tạp chí *Communication in Algebra* năm 2009. Luận văn được chia thành 3 chương. Chương 1 dành để nhắc lại một số kiến thức cơ sở có liên quan đến nội dung của luận văn như tập iđêan nguyên tố liên kết, hệ tham số, hàm tử mở rộng, môđun đối đồng điều địa phương,... Để theo dõi một cách tương đối hệ thống, Mục 1.5 của Chương 1 nhắc lại khái niệm dãy chính quy, dãy chính quy lọc, dãy chính quy suy rộng và tương ứng là các lớp môđun Cohen-Macaulay, f-môđun, f-môđun suy rộng và một số tính chất của chúng.

Nội dung chính của luận văn được trình bày trong Chương 2 và Chương 3. Chương 2 của luận văn trình bày khái niệm dãy chính quy với chiều $> s$

trong bài báo của Brodmann-Nhàn [BN] và một số tính chất của dãy này thông qua tập support và chiều của môđun mở rộng Ext của M. Cho $s \geqslant 0$ là một số nguyên, $\mathfrak{a}$ là iđêan của R, khi đó nếu $\dim M/\mathfrak{a}M > s$ thì mỗi M-dãy với chiều $> s$ trong $\mathfrak{a}$ luôn có thể mở rộng được thành một M-dãy với chiều $> s$ cực đại và tất cả các M-dãy với chiều $> s$ cực đại trong $\mathfrak{a}$ đều có độ dài như nhau và độ dài chung đó chính bằng số nguyên i nhỏ nhất sao cho $\dim(\mathrm{Supp}(H^i_{\mathfrak{a}}(M))) > s$, cũng chính là số nguyên i nhỏ nhất sao cho $\dim(\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, M)) > s$. Độ dài này được gọi là *độ sâu với chiều* $> s$ của M trong $\mathfrak{a}$, kí hiệu là $\mathrm{depth}(\mathfrak{a}, M, > s)$. Mục tiếp theo của Chương 2 là các kết quả chính của luận văn, trình bày khái niệm môđun Cohen-Macaulay với chiều $> s$ và chứng minh lại chi tiết các kết quả về đặc trưng của môđun Cohen-Macaulay với chiều $> s$: M là Cohen-Macaulay với chiều $> s$ nếu và chỉ nếu $(\mathrm{Supp}(M))_{>s}$ là catenary, đẳng chiều ($\dim M = \dim R/\mathfrak{p}$ với mọi iđêan nguyên tố tối thiểu $\mathfrak{p} \in (\mathrm{Supp}(M))_{>s}$) và $M_{\mathfrak{p}}$ là $R_{\mathfrak{p}}$-môđun Cohen-Macaulay với mọi $\mathfrak{p} \in (\mathrm{Supp}(M))_{>s}$. Hơn nữa, nếu giả thiết R là vành thương của vành Cohen-Macaulay thì M là môđun Cohen-Macaulay với chiều $> s$ nếu và chỉ nếu đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic $\widehat{M}$ của M cũng là môđun Cohen-Macaulay với chiều $> s$.

Chương cuối cùng của luận văn chứng minh một số kết quả về tính hữu hạn của tập iđêan nguyên tố liên kết của một số môđun đối đồng điều địa phương của một môđun Cohen-Macaulay với chiều $> s$. Chú ý rằng các kết quả tương tự cũng đã được Hellus [H, Định lý 4] chứng minh cho trường hợp $M = R$, trong đó R là vành Cohen-Macaulay, Asadollahi-Schenzel [AS, Định lý 1.1] mở rộng cho trường hợp M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng và Nhàn-Morales [NM, Định lý 4.1] chứng minh cho trường hợp M là f-môđun suy rộng.

Phần kết luận của luận văn tổng kết các kết quả đã đạt được.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, ta kí hiệu R là vành giao hoán, Noether và M là R-môđun có chiều Krull $\dim M = d$. Các giả thiết khác về vành và môđun khi cần sẽ được nhắc lại.

1.1 Tập iđêan nguyên tố liên kết

Định nghĩa 1.1.1. (i) Giả sử M là một R-môđun. Một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R được gọi là *iđêan nguyên tố liên kết* của M nếu tồn tại phần tử $0 \neq x \in M$ sao cho $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_R(x)$.
(ii) Môđun con Q của M được gọi là *môđun con nguyên sơ* của M nếu $M/Q \neq 0$ và với mỗi $a \in ZD(M/Q)$, tồn tại $n \in N$ sao cho $a^n(M/Q) = 0$. Khi đó $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathrm{Ann}_R(M/Q)}$ là một iđêan nguyên tố của R, ta nói Q là một môđun con $\mathfrak{p}$-*nguyên sơ* của M.
(iii) Cho N là môđun con của R môđun M ta nói N có *phân tích nguyên sơ* nếu tồn tại các môđun con nguyên sơ Q_i với $i = 1, \ldots, n$, sao cho $N = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ thành giao của hữu hạn các môđun con $\mathfrak{p}_i$-nguyên sơ. Nếu $N = 0$ hoặc $N \neq 0$ có một phân tích nguyên sơ thì ta nói N là *phân tích được*. Phân tích nguyên sơ này được gọi là *tối thiểu (thu gọn)* nếu các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_i$ là đôi một khác nhau và không có hạng tử Q_i nào là thừa,

nghĩa là với mọi $i = 1, \ldots, n$

$$Q_j \not\subseteq \bigcap_{i=1; i\neq j}^{n} Q_i.$$

(iv) Dễ thấy rằng mọi phân tích nguyên sơ của N đều có thể đưa được về dạng thu gọn. Khi đó tập hợp $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ là độc lập với việc chọn phân tích nguyên sơ tối thiểu của N và được gọi là *tập các iđêan nguyên tố liên kết* của M/N, kí hiệu bởi $\operatorname{Ass}_R M/N$. Các hạng tử $Q_i, i = 1, \ldots, n$, được gọi là các thành phần nguyên sơ của N. Nếu $\mathfrak{p}_i$ là tối thiểu trong $\operatorname{Ass}_R M/N$ thì Q_i được gọi là *thành phần cô lập,* ngược lại thì Q_i được gọi là *thành phần nhúng*.

Mệnh đề 1.1.2. [Mat, Định lý 6.1, Định lý 6.3, Định lý 6.5].

(i) $\mathfrak{p}$ *là một iđêan nguyên tố liên kết của* M *khi và chỉ khi tồn tại* N *là* R*-môđun con của* M *sao cho* N *đẳng cấu với* $R/\mathfrak{p}$.

(ii) Nếu $\mathfrak{p}$ *là một iđêan nguyên tố của vành* R *thì* $\operatorname{Ass}(R/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

(iii) Cho $\mathfrak{p}$ *là phần tử tối đại của tập iđêan có dạng* $\operatorname{Ann}(x)$, *trong đó* $0 \neq x \in M$. *Khi đó* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$. *Vì thế,* $M \neq 0$ *khi và chỉ khi* $\operatorname{Ass}(M) \neq \emptyset$. *Hơn nữa, tập* $ZD(M)$ *các ước của không của* M *chính là hợp của các iđêan nguyên tố liên kết của* M.

(iv) $\operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{M} = \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass} M} \operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{M}/\mathfrak{p}\widehat{M}$.

(v) Cho dãy khớp ngắn các R*-môđun*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Khi đó

(a) $\operatorname{Ass}_R(M') \subseteq \operatorname{Ass}_R(M) \subseteq \operatorname{Ass}_R(M') \cup \operatorname{Ass}_R(M'')$;

(b) $\operatorname{Supp}_R(M) = \operatorname{Supp}_R(M') \cup \operatorname{Supp}_R(M'')$.

(vi) Cho M là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó $\mathrm{Ass}_R(M)$ *là tập hữu hạn và* $\mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Supp}_R(M)$. *Hơn nữa, các phần tử tối thiểu của* $\mathrm{Ass}_R(M)$ *và* $\mathrm{Supp}_R(M)$ *là như nhau.*

1.2 Hệ tham số

Mục này dành để nhắc lại các khái niệm và các tính chất quan trọng về hệ tham số trên vành giao hoán, Noether, địa phương $(R, \mathfrak{m})$ và M là R-môđun hữu hạn sinh (xem [Mat]).

Định nghĩa 1.2.1. Một hệ gồm d phần tử $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ thoả mãn $\ell_R(M/(x_1, \ldots, x_d)M) < \infty$ được gọi là một *hệ tham số* của M.

Một dãy $(x_n) \subseteq R$ được gọi là một *dãy Cauchy theo tôpô* $\mathfrak{m}$-*adic* nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $x_n - x_m \in \mathfrak{m}^k$ với mọi $n, m \geq n_0$. Dãy $(x_n) \subseteq R$ được gọi là *dãy không* nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước, tồn tại số n_0 sao cho $x_n \in \mathfrak{m}^k$ với mọi $n \geq n_0$. Ta trang bị quan hệ tương đương trên tập các dãy Cauchy như sau: Hai dãy Cauchy $(x_n), (y_n)$ được gọi là *tương đương* nếu dãy $(x_n - y_n)$ là dãy không. Kí hiệu $\widehat{R}$ là tập các lớp tương đương. Chú ý rằng quy tắc cộng $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ và quy tắc nhân $(x_n)(y_n) = (x_n y_n)$ không phụ thuộc vào cách chọn các đại diện của các lớp tương đương. Vì thế nó là các phép toán trên $\widehat{R}$ và cùng với hai phép toán này, $\widehat{R}$ làm thành một vành Noether địa phương với iđêan tối đại duy nhất là $\mathfrak{m}\widehat{R}$. Vành $\widehat{R}$ vừa xây dựng được gọi là vành đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic của R.

Một dãy $(z_n) \subseteq M$ được gọi là *dãy Cauchy theo tôpô* $\mathfrak{m}$-*adic* nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước, tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $z_n - z_m \in \mathfrak{m}^k M$ với mọi $n, m \geq n_0$. Từ khái niệm dãy Cauchy như trên, tương tự ta định nghĩa được khái niệm *môđun đầy đủ theo tôpô* $\mathfrak{m}$-*adic* trên vành $\widehat{R}$. Môđun này được kí hiệu là $\widehat{M}$.

Mệnh đề 1.2.2. [Mat, Định lý 14.1, Định lý 14.2].

(i) Phần tử $x \in \mathfrak{m}$ là phần tử tham số của M khi và chỉ khi $x \notin \mathfrak{p}$, với mọi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ sao cho $\dim R/\mathfrak{p} = d$. Hệ các phần tử $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ là hệ tham số của M khi và chỉ khi $x_{i+1} \notin \mathfrak{p}$, với mọi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M/(x_1, \ldots, x_i)M)$ thoả mãn $\dim R/\mathfrak{p} = d - i$, với mọi $i = 1, \ldots, d-1$.

(ii) Cho $x_1, \ldots, x_t \in \mathfrak{m}$ là các dãy các phần tử, với $t \leqslant d$. Khi đó

$$\dim(M/(x_1, \ldots, x_t)M) \geq \dim M - t.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1, \ldots, x_t$ là một phần hệ tham số của M.

(iii) Nếu $x_1, \ldots, x_d$ là hệ tham số của M thì với mọi số nguyên dương $a_1, \ldots, a_d$, ta có $x_1^{a_1}, \ldots, x_d^{a_d}$ cũng là một hệ tham số của M.

(iv) Nếu $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số của M thì nó cũng là hệ tham số của $\widehat{M}$, trong đó $\widehat{M}$ là đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic của M.

1.3 Hàm tử mở rộng

Trong phần này ta đưa ra khái niệm và các tính chất cơ bản của môđun Ext thường được dùng trong luận văn (xem [Mat]).

Định nghĩa 1.3.1. Cho M, N là các R-môđun và $n \geqslant 0$ là một số tự nhiên. Môđun dẫn xuất phải thứ n của hàm tử $\mathrm{Hom}(-, N)$ ứng với M được gọi là môđun *mở rộng thứ n* của M và N, được kí hiệu là $\mathrm{Ext}_R^n(M, N)$.

Cụ thể, để xây dựng Ext_R^n ta lấy một giải xạ ảnh của M

$$\ldots \to P_2 \xrightarrow{.u_2} P_1 \xrightarrow{.u_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0.$$

Tác động hàm tử $\mathrm{Hom}(-, N)$ vào dãy khớp trên ta có đối phức

$$0 \to \mathrm{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{u_1^*} \mathrm{Hom}(P_1, N) \xrightarrow{u_2^*} \mathrm{Hom}(P_2, N) \to \ldots$$