ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HÀ THỊ HUYỀN TRANG

NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

HÀ THỊ HUYỀN TRANG

NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS.TSKH. Lê Dũng Mưu**

THÁI NGUYÊN - 2014

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2014
Người viết Luận văn

Hà Thị Huyền Trang

Lời cảm ơn

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của GS. Lê Dũng Mưu (Viện Toán học Việt Nam). Với lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tôi xin được bày tỏ lời cảm ơn chân thành đến thầy, người thầy kính mến đã hết lòng giúp đỡ, dạy bảo, động viên và tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình hoàn thành luận văn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn ban lãnh đạo khoa Toán, ban lãnh đạo phòng sau Đại học của Trường Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tôi hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập của mình.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy cô đã tham gia giảng dạy cho lớp Cao học chuyên ngành Toán khóa 20.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2014
Người viết Luận văn

Hà Thị Huyền Trang

Mục lục

Lời cam đoan **i**

Lời cảm ơn **ii**

Mục lục **iii**

Mở đầu **1**

1 Bài toán cân bằng. **2**

1.1 Các kiến thức chuẩn bị. 2

1.2 Bài toán cân bằng và các trường hợp riêng. 8

2 Nguyên lý biến phân Ekeland cho bài toán cân bằng. **14**

2.1 Nguyên lý biến phân Ekeland. 14

2.1.1 Nguyên lý biến phân Ekeland cổ điển. 14

2.1.2 Nguyên lý biến phân Ekeland trong không gian hữu hạn chiều 17

2.2 Sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng. 19

2.2.1 Một số định lý cơ bản về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng. 19

2.2.2 Nguyên lý Ekeland cho bài toán cân bằng. 31

Kết luận **43**

Tài liệu tham khảo **44**

Mở đầu

Cho $\mathcal{H}$ là một không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ và $||.||$ tương ứng. Cho C là một tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathcal{H}$ và f là một song hàm từ $C \times C$ vào $\mathbb{R}$ sao cho $f(x,x) = 0$ với mọi $x \in C$. Trong Luận văn này ta sẽ xét bài toán cân bằng sau đây, được kí hiệu là (EP)

Tìm $x \in C$ sao cho $f(x,y) \geq 0$ với mọi $y \in C$.

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng người ta thường sử dụng các định lý điểm bất động Brouwer, Kakutani, Ky Fan,.... Một phương pháp cơ bản để chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng này là dựa trên nguyên lý biến phân Ekeland. Từ khi ra đời, nguyên lý biến phân Ekeland đã trở thành công cụ mạnh trong giải tích hiên đại. Những ứng dụng của nguyên lý này bao trùm nhiều lĩnh vực như: Lý thuyết tối ưu, giải tích không trơn, lý thuyết điều khiển, lý thuyết điểm bất động, kinh tế,...

Mục đích của Luận văn này là trình bày những kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng đặc biệt là ứng dụng của nguyên lý biến phân Ekeland cho bài toán cân bằng và hệ hữu hạn các bài toán cân bằng.

Nội dung luận văn được trình bày trong hai chương. Chương 1 trình bày một số khái niệm cơ bản liên quan đến luận văn, giới thiệu về bài toán cân bằng và các trường hợp riêng của bài toán cân bằng. Chương 2 gồm nguyên lý biến phân Ekeland (nguyên lý biến phân Ekeland cổ điển và nguyên lý biến phân Ekeland trong không gian hữu hạn chiều), một số định lý cơ bản về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng và nguyên lý biến phân Ekeland cho bài toán cân bằng.

Chương 1

Bài toán cân bằng.

Chương này trình bày các khái niệm liên quan đến bài toán cân bằng và các trường hợp riêng quan trọng của bài toán cân bằng. Các kiến thức trong chương được trích từ tài liệu [1], [2], [3], [5], [6], [10].

1.1 Các kiến thức chuẩn bị.

Định nghĩa 1.1. *Không gian định chuẩn thực là một không gian tuyến tính thực X trong đó ứng với mỗi phần tử $x \in X$ ta có một số $||x||$ gọi là chuẩn của x, thỏa mãn các điều kiện sau :*

1. $||x|| > 0, \forall x \neq 0; ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||;$
3. $||\lambda x|| = |\lambda|.||x||;$

với mọi $x, y \in X$ và $\lambda \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2. *Cho $\mathcal{H}$ là một không gian vectơ trên $\mathbb{R}$, tích vô hướng xác định trong $\mathcal{H}$ là một ánh xạ*

$$\langle .,. \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$$

thỏa mãn các điều kiện sau đây :

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H};$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in \mathcal{H};$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{R};$

4. $\langle x, x\rangle \geq 0, \forall x \in \mathcal{H}$ *và* $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Số $\langle x, y\rangle$ *được gọi là tích vô hướng của hai vectơ* x, y *trong* $\mathcal{H}$.

Nhận xét 1.1. Từ định nghĩa suy ra

1. $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$,
2. $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$,
3. $\langle x, 0\rangle = 0$,

với mọi $x, y, z \in \mathcal{H}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1.1. *Với* $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, *biểu thức*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

xác định một tích vô hướng trong $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.3. *Cặp* $(\mathcal{H}, \langle , \rangle)$ *trong đó* $\mathcal{H}$ *là một không gian tuyến tính trên* $\mathbb{R}$, $\langle , \rangle$ *là tích vô hướng trên* $\mathcal{H}$ *được gọi là không gian tiền Hilbert thực.*

Định lý 1.1. *Mọi không gian tiền Hilbert* $\mathcal{H}$ *đều là không gian định chuẩn, với chuẩn được xác định bởi công thức*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \forall x \in \mathcal{H}. \tag{1.1}$$

Chuẩn này được gọi là chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng.

Định nghĩa 1.4. *Nếu* $\mathcal{H}$ *là không gian tiền Hilbert thực và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng xác định bởi (1.1) thì* $\mathcal{H}$ *được gọi là không gian Hilbert thực.*

Ví dụ 1.2. $\mathbb{R}^n$ *là không gian Hilbert thực với tích vô hướng*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

trong đó

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

và chuẩn cảm sinh

$$||x||^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

Ví dụ 1.3. $L^2_{[a,b]}$ *là không gian các hàm bình phương khả tích trên* $[a, b]$ *với* $f \in L^2_{[a,b]}$ *sao cho* $\int\limits_a^b f^2(x)dx < \infty$ *là một không gian Hilbert với tích vô hướng*

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx, \quad f, g \in L^2_{[a,b]}$$

và chuẩn cảm sinh

$$||f||_{L^2_{[a,b]}} = \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Định nghĩa 1.5. *Cho* E *là một tập hợp khác rỗng. Một ánh xạ* $d : E \times E \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn:*

1. $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in E;$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$
3. $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in E;$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in E.$

Khi đó d *được gọi là khoảng cách hay một mêtric trên* E *và cặp* (E, d) *được gọi là một không gian mêtric.*

Định nghĩa 1.6. *Cho không gian mêtric* (E, d)*. Ta nói dãy phần tử* $\{x_n\} \subset E$ *hội tụ về phần tử* $x \in E$ *nếu*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Định nghĩa 1.7. *Cho không gian mêtric* (E, d)*. Dãy* $\{x_n\} \subset E$ *được gọi là dãy Cauchy nếu*

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Định nghĩa 1.8. *Không gian mêtric (E, d) gọi là đầy đủ nếu mỗi dãy Cauchy trong nó đều là dãy hội tụ.*

Nhận xét 1.1. *Như vậy không gian Hilbert là một không gian mêtric đầy đủ.*

Tiếp theo, ta sẽ nêu một số định nghĩa và kết quả cơ bản của giải tích lồi được phát biểu trong [2], [10]
Xét C là tập con khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$

Định nghĩa 1.9. *Tập C trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$ được gọi là một tập lồi nếu*

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1] \quad \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Định nghĩa 1.10. *Cho $C \subset \mathcal{H}$ là tập lồi khác rỗng và ánh xạ $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.Khi đó:*

1. *Hàm f được gọi là hàm lồi trên C nếu*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in (0, 1).$$

2. *Hàm f được gọi là hàm lồi chặt trên C nếu*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x \neq y \in C, \forall \lambda \in (0, 1).$$

3. *Hàm f được gọi là hàm lồi mạnh trên C với hệ số $\eta > 0$ nếu*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \eta\frac{\lambda(1 - \lambda)}{2}||x - y||^2,$$

$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in (0, 1).$

Ví dụ 1.4. *Hàm affine.$f(x) = a^T x + b$, trong đó $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ là hàm lồi. Nó thỏa mãn đẳng thức*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in C, \forall \lambda \in (0, 1).$$

Do đó nó không lồi chặt.

Ví dụ 1.5. *Hàm chỉ.Cho $C \neq \emptyset$ là một tập lồi. Đặt :*

$$\delta_C := \begin{cases} 0 \; khi \; x \in C \\ +\infty \; khi \; x \notin C \end{cases}$$

Ta nói δ_C là hàm chỉ của C. Do C lồi nên δ_C là hàm lồi.