ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

------------ ✯ ------------

**LÊ MINH AN**

# VỀ ĐỘ SÂU CỦA VÀNH NOETHER ĐỊA PHƯƠNG

**LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2014**

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

**LÊ MINH AN**

# VỀ ĐỘ SÂU CỦA VÀNH NOETHER ĐỊA PHƯƠNG

Chuyên ngành : ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số : 60.46.01.04

**LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC**

HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS. TSKH. NGUYỄN TỰ CƯỜNG

**THÁI NGUYÊN - 2014**

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

Xác nhận luận văn đã được chỉnh sửa lại theo yêu cầu của hội đồng chấm luận văn.

**Khoa Toán**

So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

# Mục lục

**Lời mở đầu** **1**

**1 Độ sâu của môđun trên vành Noether địa phương** **3**

1.1 Dãy chính quy . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

1.2 Độ sâu của môđun . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

**2 Đồng điều Koszul** **19**

2.1 Phức Koszul và đồng điều Koszul . . . . . . . . . . . . . . . . 19

2.2 Đặc trưng độ sâu qua đồng điều Koszul . . . . . . . . . . . . 24

**3 Vành và môđun Cohen - Macaulay** **29**

3.1 Định nghĩa và các tính chất cơ sở . . . . . . . . . . . . . . . . 29

3.2 Một số đặc trưng vành Cohen-Macaulay . . . . . . . . . . . 33

**Kết luận** **41**

**Tài liệu tham khảo** **42**



So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

# Lời mở đầu

Sau chiều thì độ sâu là bất biến cơ bản nhất của vành Noether địa phương $A$ hoặc $A-$môđun hữu hạn sinh $M$. Độ sâu có thể được nghiên cứu bằng các công cụ nội tại của đại số giao hoán, nhưng cũng có thể nghiên cứu bằng các các đối tượng của đại số đồng điều. Chính vì thế, chúng tôi đã lựa chọn đề tài **"Về độ sâu của vành Noether địa phương"** làm luận văn tốt nghiệp. Luận văn trình bày các kết quả về độ sâu chủ yếu thông qua các đối tượng của đại số đồng điều như môđun Ext hay đồng điều Koszul, từ đó bước đầu tìm hiểu về vành và môđun Cohen - Macaulay, một lớp vành quan trọng trong đại số giao hoán.

Luận văn được chia thành ba chương. Chương 1 trình bày khái niệm và một số tính chất cơ sở của dãy chính quy, sự tồn tại của dãy chính quy thông qua tính triệt tiêu của môđun Ext, từ đó trình bày định nghĩa và các kết quả về độ sâu của môđun hữu hạn sinh trên vành Noether địa phương. Chương 2, trình bày về phức Koszul và đặc trưng độ sâu thông qua tính triệt tiêu của đồng điều Koszul. Trên cơ sở các tính chất về độ sâu được trình bày ở Chương 1 và Chương 2, Chương 3 trình bày sơ lược về khái niệm, tính chất cơ sở và một vài đặc trưng của vành và môđun Cohen - Macaulay.

Các nội dung trong luận văn được trình bày dựa theo Chương 6 trong tài liệu [5] và [6] của Hydeyuki Matsumura. Với mong muốn lại hệ thống lại một số nội dung quan trọng về độ sâu và vành Cohen - Macaulay, tác giả luận văn đã dành nhiều thời gian nghiên cứu những kết quả này. Khi trình bày luận văn, tác giả cũng đã cố gắng trình bày chi tiết lại các chứng



So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

minh, bổ sung thêm một số ví dụ và kết quả trong các tài liệu tham khảo khác. Bên cạnh đó, tác giả cũng đưa ra một vài chứng minh đơn giản không được trình bày trong tài liệu.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường. Thầy đã tạo điều kiện để tôi có cơ hội được tiếp xúc với môi trường nghiên cứu hiện đại và chuyên nghiệp, để từ đó tôi đã bước đầu làm quen với công việc nghiên cứu toán một cách nghiêm túc. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn PGS. TS. Lê Thanh Nhàn, TS. Đoàn Trung Cường, TS. Trần Nguyên An, những thầy cô đã tận tình giảng dạy cho tôi những kiến thức cơ sở và giúp đỡ tôi giải quyết những vướng mắc tôi gặp phải khi đọc tài liệu cũng như khi trình bày luận văn.

Cuối cùng, tôi xin cảm ơn người thân, bạn bè đã cổ vũ và động viên tôi để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn cũng như khóa học của mình.

*Thái Nguyên, tháng 04 năm 2014*

Tác giả luận văn

Lê Minh An



So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

# Chương 1

# Độ sâu của môđun trên vành Noether địa phương

Khái niệm dãy chính quy và độ sâu rất quan trọng cho lý thuyết vành Cohen - Macaulay. Độ sâu của vành Noether địa phương $A$ hoặc $A-$môđun hữu hạn sinh được định nghĩa bằng số phần tử trong dãy chính quy cực đại, và có thể được đặc trưng thông qua tính triệt tiêu của môđun Ext. Trong toàn bộ luận văn, khi nói đến một vành, ta quy ước là vành giao hoán có đơn vị.

## 1.1 Dãy chính quy

Trong tiết này trình bày định nghĩa, ví dụ và một vài tính chất cơ bản của dãy chính quy.

**Định nghĩa 1.1.1.** Cho $A$ là vành Noether, $M$ là một $A-$môđun. Phần tử $a \in A$ được gọi là *phần tử $M-$chính quy* nếu $ax \neq 0$ với mọi $0 \neq x \in M$. Dãy $a_1, ..., a_n$ các phần tử của $A$ là một *$M-$dãy chính quy* (hoặc $M-$dãy) nếu các điều kiện sau thỏa mãn:



So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

(i) $M \neq (a_1, ..., a_n)M$, và

(ii) Với mỗi $1 \leq i \leq n$, $a_i$ là $M/(a_1, ..., a_{i-1})M-$ chính quy. Tức là với mỗi $1 \leq i \leq n$,

$$M/(a_1, ..., a_{i-1})M \xrightarrow{a_i} M/(a_1, ..., a_{i-1})M$$

là một đơn ánh.

Khi tất cả các $a_i$ nằm trong một iđêan $I$ của $A$ ta nói $a_1, ..., a_n$ là một *$M-$dãy chính quy trong $I$*.

Khi $M = A$ thì $a_1, ..., a_n$ là $A-$dãy nếu và chỉ nếu $(a_1, ..., a_n)$ là iđêan thực sự của $A$, và với mỗi $i = 1, ..., n$ thì $a_i$ không phải ước của không trên $A/(a_1, ..., a_{i-1})$.

Với mỗi $A-$môđun $M$ ta kí hiệu

$$ZD_A(M) = \{a \in A \,|\, \text{tồn tại } 0 \neq x \in M \text{ sao cho } ax = 0\}$$

là tập các ước của 0 trên $M$. Nếu không gây nhầm lẫn ta sẽ kí hiệu tập này là $ZD(M)$.

**Ví dụ 1.1.2.** (i) Cho $A$ là vành, đặt $S := A[x_1, ..., x_n]$ là vành đa thức $n$ biến $x_1, ..., x_n$. Ta có đẳng cấu $S/(x_1, ..., x_{i-1}) \cong A[x_i, ..., x_n]$, mà $x_i$ là $A[x_i, ..., x_n]-$chính quy nên $x_1, ..., x_n$ là $S-$dãy.

(ii) Chú ý rằng khái niệm $M-$dãy chính quy phụ thuộc vào vị trí các phần tử trong dãy, chẳng hạn xét trong trường $K$ và $A = K[x_1, x_2, x_3]$ thì $x_1, x_2(1 - x_1), x_3(1 - x_1)$ là $A-$dãy. Nhưng $x_2(1 - x_1), x_3(1 - x_1), x_1$ lại không phải $A-$dãy. Thật vậy, trước hết ta thấy rằng $x_1 \notin ZD(A)$ và $(x_1)$, $(x_1, x_2(1 - x_1)) = (x_1, x_2)$ là các iđêan nguyên tố của $A$. Khi đó nếu $h \cdot x_2(1 - x_1) \in (x_1)$, do $x_2(1 - x_1) \notin (x_1)$ nên $h \in (x_1)$ tức là $x_2(1 - x_1)$ là $A/(x_1)-$chính quy. Tương tự, nếu $h \cdot x_3(1 - x_1) \in (x_1, x_2(1 - x_1))$, do $x_3(1 - x_1) \notin (x_1, x_2(1 - x_1))$ nên $h \in (x_1, x_2(1 - x_1))$, tức là $x_3(1 - x_1)$ là



So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

$A/(x_1, x_2(1-x_1))-$chính quy. Từ đó $x_1, x_2(1-x_1), x_3(1-x_1)$ là $A-$dãy. Nhưng $x_2(1-x_1), x_3(1-x_1), x_1$ không phải $A-$dãy. Vì $x_2 \notin (x_2(1-x_1))$ nhưng $x_2(1-x_1)x_3 \in (x_2(1-x_1))$ tức là $x_3(1-x_1) \in ZD(A/(x_2(1-x_1)))$.

**Định nghĩa 1.1.3.** Cho $A$ là vành Noether và $0 \neq M$ là $A-$môđun hữu hạn sinh. $I$ là iđêan của $A$ thỏa mãn $IM \neq M$. Lấy $a_1, ..., a_n$ là $M-$dãy các phần tử trong $I$. Ta nói $a_1, ..., a_n$ *là $M-$dãy cực đại* trong $I$ nếu không có phần tử $b \in I$ nào thỏa mãn $a_1, ..., a_n, b$ là $M-$dãy có $n+1$ phần tử.

**Nhận xét 1.1.4.** Cho $A$ là vành Noether và $0 \neq M$ là $A-$môđun hữu hạn sinh.

(i) Không tồn tại một dãy vô hạn $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ các phần tử của $A$ thỏa mãn, với mọi $n \in \mathbb{N}$, dãy hữu hạn $(a_i)_{i=1}^{n}$ là một $M-$dãy. Từ đó, mọi $M-$dãy trong $I$ đều có thể mở rộng thành $M-$dãy cực đại trong $I$. Thật vậy, giả sử có một dãy $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ thỏa mãn điều kiện trên. Khi đó ta luôn có $(a_1, ..., a_n) \subsetneq (a_1, ..., a_n, a_{n+1})$ (do $a_{n+1} \notin (a_1, ..., a_n)$). Tức là là ta có dãy

$$(a_1) \subsetneq (a_1, a_2) \subsetneq ... \subsetneq (a_1, ..., a_n) \subsetneq ...$$

là dãy tăng vô hạn các iđêan trong $A$. Mâu thuẫn với giả thiết $A$ là Noether.

(ii) Gọi $\underline{a} = a_1, ..., a_n$ là $M-$dãy, $\underline{a}$ là $M-$dãy cực đại trong $I$ khi và chỉ khi $I \subseteq ZD(M/(\underline{a})M)$. Mà

$$ZD(M/(\underline{a})M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/(\underline{a})M)} \mathfrak{p},$$

và $\mathrm{Ass}(M/(\underline{a})M)$ là tập hữu hạn, nên theo định lý tránh nguyên tố thì $I$ nằm trong một iđêan nguyên tố liên kết nào đó của $M/(\underline{a})M$.

(iii) Nhắc lại rằng, với $(A, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương chiều $d$, theo ([6], Th. 13.4) luôn tồn tại một iđêan $\mathfrak{m}-$nguyên sơ sinh bởi $d$ phần tử,



So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/

nhưng không sinh bởi ít hơn $d$ phần tử. Nếu $\underline{x} = x_1, ..., x_d$ là hệ sinh của một iđêan $\mathfrak{m}-$nguyên sơ thì $\underline{x}$ được gọi là một *hệ tham số* của $A$, theo ([6], Th. 14.1) hệ tham số $\underline{x}$ có tính chất $\dim A/(x_1, ..., x_i) = d - i$ với mọi $0 \leq i \leq d$. Đặc biệt, nếu $\underline{x}$ là hệ sinh của $\mathfrak{m}$ thì $A$ được gọi là *vành địa phương chính quy* và $\underline{x}$ là *hệ tham số chính quy* của $A$. Theo ([6], Th. 14.3) vành địa phương chính quy là miền nguyên. Từ đó, hệ tham số chính quy $\underline{x}$ của vành địa phương chính quy $(A, \mathfrak{m})$ là một $A-$dãy. Thật vậy, ta có $\overline{A} = A/(x_1, ..., x_i)$ là vành địa phương chiều $d - i$ với mọi $0 \leq i < d$ và $\mathfrak{m}/(x_1, ..., x_i)$ là iđêan cực đại của $\overline{A}$ sinh bởi $d - i$ phần tử $\overline{x}_{i+1}, ..., \overline{x}_d$ (là ảnh chính tắc của $x_{i+1}, ..., x_d$ trong $\overline{A}$). Suy ra $\overline{A}$ cũng là vành địa phương chính quy, do đó cũng là miền nguyên. Rõ ràng $x_{i+1} \notin (x_1, ..., x_i)$ nên $x_{i+1}$ là $A/(x_1, ..., x_i)-$ chính quy.

(iv) Từ Ví dụ 1.1.2,(ii) ta thấy dãy chính quy phụ thuộc vào vị trí các phần tử trong dãy. Tuy nhiên, ta chứng minh được nếu các phần tử của dãy chính quy nằm trong căn Jacobson thì mọi hoán vị của nó cũng là dãy chính quy. Ta có thể chứng minh điều đó trực tiếp theo định nghĩa bằng cách sử dụng bổ đề Nakayama, ở đây được trình bày trong Hệ quả 2.2.2 theo một cách khác.

(v) Ta cũng chứng minh được mọi dãy chính quy cực đại trong một iđêan đều có cùng số phần tử, từ đó ta sẽ có khái niệm độ sâu của một môđun. Điều này sẽ được trình bày ở tiết sau.

Tiếp theo ta sẽ trình bày một số tính chất khác của $M-$dãy.

**Định lý 1.1.5.** *Cho $(A, \mathfrak{m})$ là vành Noether địa phương, $M$ là $A-$môđun hữu hạn sinh. Lấy $a_1, ..., a_n$ là $M-$dãy. Khi đó*

$$\dim M/(a_1, ..., a_n)M = \dim M - n.$$



So hoa bôi Trung tam Hoc lieu – ĐHTN http://www.lrc.tnu.edu.vn/