ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN QUANG BẠO

TẬP IĐÊAN NGUYÊN TỐ GẮN KẾT VÀ TÍNH CHẤT DỊCH CHUYỂN ĐỊA PHƯƠNG

2012

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Trong suốt luận văn này, ta luôn giả thiết các vành là giao hoán, Noether. Phân tích nguyên sơ và tập iđêan nguyên tố liên kết đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu môđun trên vành giao hoán Noether. Lý thuyết phân tích nguyên sơ cho một iđêan hay cho một môđun được xem như mở rộng của Định lý cơ bản cho số học: một số tự nhiên lớn hơn 1 được phân tích thành tích của các thừa số nguyên tố và sự phân tích đó là duy nhất nếu không kể đến thứ tự các nhân tử. Một *phân tích nguyên sơ* của môđun con N của $R-$môđun M là một biểu diễn $N = \bigcap_{i=1}^{r} Q_i$, trong đó mỗi Q_i là $\mathfrak{p}_i-$nguyên sơ.

Lí thuyết biểu diễn thứ cấp cho các môđun giới thiệu bởi I. G. Macdonald [Mac] năm 1973 theo một nghĩa nào đó là đối ngẫu với lí thuyết phân tích nguyên sơ: Một $R-$môđun M là *thứ cấp* nếu phép nhân bởi x trên M là toàn cấu hoặc lũy linh với mọi $x \in R$. Môđun M là *biểu diễn được* nếu nó là tổng của những môđun thứ cấp

$$M = S_1 + S_2 + \cdots + S_n,$$

trong đó các S_i là môđun $\mathfrak{p}_i$ thứ cấp $i = 1, ..., n$. Nếu các $\mathfrak{p}_i$ là phân biệt và các S_i là không bỏ đi được trong sự phân tích trên của M thì phân tích đó được gọi là phân tích thứ cấp tối thiểu của M. Hơn nữa khi đó tập $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ chỉ phụ thuộc M mà không phụ thuộc vào biểu diễn thứ cấp tối thiểu của M, ta gọi nó là *tập các iđêan gắn kết* của M, và kí hiệu là $\operatorname{Att} M$. Phân tích thứ cấp và tập iđêan nguyên tố gắn kết đóng vai trò quan trong trong việc nghiên cứu môđun Artin.

Đối đồng điều địa phương được giới thiệu bởi A. Grothendieck vào những năm 1960. Ngày nay Đối đồng điều địa phương đã trở thành công cụ không thể thiếu trong Hình học đại số, Đại số giao hoán. Theo A. Grothendieck môđun đối đồng điều địa phương với giá cực đại là các môđun Artin. Chính vì vậy việc nghiên cứu tập iđêan nguyên tố liên kết của các môđun này là cần thiết. Nội dung chính của luận văn trình bày lại các kết quả của I. G. Macdonald và R. Y. Sharp trong bài báo "An elementary proof of the non-vanishing of certain local cohomology modules", *Quart. J. Math. Oxford,* (2) **23**, pp. 197-204 (1972) và của R. Y. Sharp trong bài báo "Some results on the vanishing of local cohomology modules", *Proc. London Math. Soc*, **30**, pp. 177-195 (1975). Bên cạnh đó luận văn trình bày một cách hệ thống các kiến thức về phân tích thứ cấp và tập iđêan nguyên tố gắn kết của môđun theo bài báo "Secondary representation of modules over a commutative ring", *Symposia Mathematica*, **11**, pp. 23-43 (1973) của I. G. Macdonald

Luận văn được hoàn thành với sự chỉ dạy hướng dẫn nhiệt tình của thầy giáo Trần Nguyên An, nhân dịp này em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Em cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành đến Khoa Toán, Khoa sau Đại học Trường Đại học Sư Phạm Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho em trong thời gian học tập tại trường. Xin được cảm ơn gia đình, đồng nghiệp, bạn bè trong lớp cao học Toán K18 đã quan tâm, động viên, giúp đỡ em trong thời gian học tập và làm luận văn.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Vành và môđun Artin

Ta luôn giả thiết các vành là vành giao oán Noether

1.1.1 Định nghĩa. Cho R là vành giao hoán và A là R-môđun. Khi đó A được gọi là *môđun Artin* nếu mỗi dãy giảm các môđun con của A đều dừng nghĩa là nếu $A_0 \supseteq A_1 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq ...$ là một dãy giảm dần các môđun con của A thì tồn tại $k \in \mathbb{N}$ sao cho $A_k = A_n$ với mọi $n \geq k$. Vành R được gọi là *vành Artin* nếu nó là một R-môđun Artin, tức là mọi dãy giảm các iđêan của R đều dừng.

Mệnh đề sau cho ta một điều kiện tương đương với định nghĩa môđun Artin.

1.1.2 Mệnh đề. *Cho R là vành giao hoán và A là một R-môđun. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) A là môđun Artin;

(ii) Mỗi tập khác rỗng các môđun con của A đều có phần tử cực tiểu.

Để đề cập đến một vài tính chất của môđun Artin, sau đây ta sẽ nhắc lại khái niệm độ dài của môđun.

1.1.3 Định nghĩa. Cho R là vành giao hoán khác không và M là một R-môđun.

(i) Một dãy $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$ các môđun con của M được gọi là một *xích*.

(ii) Xích $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ được gọi là một *dãy hợp thành của M* nếu M_{i+1}/M_i là các môđun đơn với mọi $i = 0, 1, \ldots, n-1$, tức là M_{i+1}/M_i có đúng hai môđun con là 0 và chính nó.

(iii) *Độ dài* của M, kí hiệu là $\ell_R(M)$, là cận trên đúng của các độ dài của các xích có dạng $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$, trong đó $M_i \neq M_{i+1}$ với mọi $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Một R-môđun M được gọi là có *độ dài hữu hạn* nếu M có ít nhất một dãy hợp thành. Trong trường hợp này các dãy hợp thành của M có cùng độ dài và khi đó độ dài của M, kí hiệu là $\ell_R(M)$, chính là độ dài của một dãy hợp thành nào đó của M. Hơn thế nữa mỗi dãy tăng hoặc giảm thực sự các môđun con của M đều có độ dài không vượt quá độ dài của dãy hợp thành.

1.1.4 Định lý. *Ta có các phát biểu sau là đúng.*

(i) Nếu R là vành Artin thì mọi iđêan nguyên tố của R đều tối đại.

(ii) Nếu R là vành Artin thì R có hữu hạn iđêan tối đại.

Bây giờ ta sẽ nhắc lại khái niệm chiều của vành và chiều của môđun.

1.1.5 Định nghĩa. (i) Cho R là vành giao hoán khác không. Một dãy $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ trong đó $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ là các iđêan nguyên tố của R, gọi là một *dãy các iđêan nguyên tố của* R độ dài n.

Cận trên của các độ dài cực đại của dãy iđêan nguyên tố trong R có dạng

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \ldots \supsetneq \mathfrak{p}_n$$

được gọi là *độ cao* của $\mathfrak{p}$, ký hiệu là $\operatorname{ht} \mathfrak{p}$.

(ii) *Chiều của vành* R, kí hiệu là $\dim R$, được định nghĩa là cận trên của độ cao các iđêan nguyên tố trong R

$$\dim(R) = \operatorname{Sup}\{\operatorname{ht} \mathfrak{p} \,|\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)\}.$$

Chiều này được gọi là *chiều Krull của* R. Nếu $\dim R$ là hữu hạn thì nó bằng độ dài của dãy iđêan nguyên tố dài nhất trong R.

(iii) Cho $M \neq 0$ là một R-môđun. Khi đó *chiều Krull của môđun* M, ký hiệu là $\dim M$, là $\dim R/\operatorname{Ann} M$. Nếu M là môđun không thì ta quy ước $\dim M = -1$.

1.1.6 Mệnh đề. *$R \neq 0$ là vành Artin nếu và chỉ nếu R là vành Noether và* $\dim R = 0$.

1.1.7 Bổ đề. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương. Cho A là R-môđun. Các phát biểu sau là đúng*

(i) $\ell(A) < \infty$ khi và chỉ khi A vừa là Noether vừa là Artin.

(ii) Cho $\ell(A) = n < \infty$ là môđun có độ dài hữu hạn. Khi đó $\mathfrak{m}^n A = 0$.

1.2 Môđun Ext và môđun đối đồng điều địa phương

1.2.1 Định nghĩa. Một *giải xạ ảnh* của M là một dãy khớp

$$\ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

trong đó mỗi P_i là môđun xạ ảnh.

1.2.2 Định nghĩa. Cho M, N là các $R-$môđun và $n \geq 0$ là một số tự nhiên. Môđun dẫn suất phải thứ n của hàm tử $\mathrm{Hom}(-, N)$ ứng với M được gọi là môđun *mở rộng thứ* n của M và N và được kí hiệu là $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$. Cụ thể, nếu $\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{u_2} P_1 \xrightarrow{u_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$ là một giải xạ ảnh của M, tác động hàm tử $\mathrm{Hom}(-, N)$ vào dãy khớp trên ta có phức

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_0, N) \xrightarrow{u_1^*} \mathrm{Hom}(P_1, N) \xrightarrow{u_2^*} \mathrm{Hom}(P_2, N) \longrightarrow \ldots$$

Khi đó $\mathrm{Ext}^n_R(M, N) = \mathrm{Ker}\, u^*_{n+1} / \mathrm{Im}\, u^*_n$ là môđun đối đồng điều thứ n của phức trên (môđun này không phụ thuộc vào việc chọn giải xạ ảnh của M).

1.2.3 Mệnh đề. *Nếu M, N là hữu hạn sinh thì $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ là hữu hạn sinh với mọi n.*

Kết quả dưới đây cho ta tính chất giao hoán giữa Ext và hàm tử địa phương hoá.

1.2.4 Mệnh đề. *Nếu S là tập đóng nhân của R thì*

$$S^{-1}(\mathrm{Ext}^n_R(M, N)) \cong \mathrm{Ext}^n_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N),$$

trong đó S^{-1} là hàm tử địa phương hoá. Đặc biệt,

$$(\mathrm{Ext}_R^n(M,N))_{\mathfrak{p}} \cong \mathrm{Ext}_{R_{\mathfrak{p}}}^n(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})$$

với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R.

1.2.5 Mệnh đề. *Giả sử $f' : (R', \mathfrak{m}') \longrightarrow (R, \mathfrak{m})$ là một toàn cấu vành. Giả sử $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R), \mathfrak{p}' = f^{-1}(\mathfrak{p}) \in \mathrm{Spec}(R')$. Khi đó f cảm sinh toàn cấu*

$$f' : R'_{\mathfrak{p}'} \longrightarrow R_{\mathfrak{p}},$$

thỏa mãn $f'(r'/s') = f(r')/f(s')$ với mọi $r' \in R'$ và $s' \in R' \setminus \mathfrak{p}'$.

Giả sử M là R-môđun hữu hạn sinh, j là số nguyên không âm. Khi đó tồn tại $R_{\mathfrak{p}}$-môđun $\mathrm{Ext}^j_{R'_{\mathfrak{p}'}}(M_{\mathfrak{p}}, R'_{\mathfrak{p}'})$ và

$$\mathrm{Ext}^j_{R'_{\mathfrak{p}'}}(M_{\mathfrak{p}}, R'_{\mathfrak{p}'}) \cong (\mathrm{Ext}^j_{R'}(M, R'))_{\mathfrak{p}}$$

như các $R_{\mathfrak{p}}$-môđun.

Đối đồng điều địa phương được giới thiệu bởi A. Grothendieck vào những năm 1960. Ngày nay Đối đồng điều địa phương đã trở thành công cụ không thể thiếu trong Hình học đại số, Đại số giao hoán. Trước tiên ta giới thiệu khái niệm hàm tử I-xoắn.

1.2.6 Định nghĩa. Cho I là iđêan của R. Với mỗi $R-$môđun N ta định nghĩa $\Gamma_I(N) = \bigcup_{n\geq 0}(0 :_N I^n)$. Nếu $f : N \longrightarrow N'$ là đồng cấu các $R-$môđun thì ta có đồng cấu $f^* : \Gamma_I(N) \longrightarrow \Gamma_I(N')$ cho bởi $f^*(x) = f(x)$. Khi đó $\Gamma_I(-)$ là hàm tử khớp trái từ phạm trù các $R-$môđun đến phạm trù các $R-$môđun. Hàm tử $\Gamma_I(-)$ được gọi là *hàm tử $I-$xoắn.*

Một *giải nội xạ* của N là một dãy khớp

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E_0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \dots$$

trong đó mỗi E_i là môđun nội xạ. Chú ý mỗi môđun đều có giải nội xạ.

1.2.7 Định nghĩa. Cho N là $R-$môđun và I là iđêan của R. Môđun dẫn suất phải thứ n của hàm tử $I-$xoắn $\Gamma_I(-)$ ứng với N được gọi là môđun *đối đồng điều thứ* n của N, kí hiệu là $H_I^n(N)$. Cụ thể, nếu

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E_0 \xrightarrow{u_0} E_1 \xrightarrow{u_1} E_2 \dots$$

là giải nội xạ của N, tác động hàm tử $\Gamma_I(-)$ ta có phức

$$0 \longrightarrow \Gamma(E_0) \xrightarrow{u_0^*} \Gamma(E_1) \xrightarrow{u_1^*} \Gamma(E_2) \longrightarrow \dots$$

Khi đó $H_I^n(N) = \operatorname{Ker} u_n^* / \operatorname{Im} u_{n-1}^*$ là môđun đối đồng điều thứ n của phức trên (nó không phụ thuộc vào việc chọn giải nội xạ của N).

Sau đây là tính chất cơ bản của môđun đối đồng điều địa phương.

1.2.8 Mệnh đề. *Cho N là một $R-$môđun.*

(i) $H_I^0(N) \cong \Gamma_I(N)$.

(ii) Với $\overline{N} = N/\Gamma_I(N)$ ta có $H_I^n(N) \cong H_I^n(\overline{N})$ với $n \geq 1$.

(iii) Nếu $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ là dãy khớp ngắn thì với mỗi n có đồng cấu nối $H_I^n(N'') \longrightarrow H_I^{n+1}(N')$ sao cho ta có dãy khớp dài

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Gamma_I(N') \longrightarrow \Gamma_I(N) \longrightarrow \Gamma_I(N'') \longrightarrow H_I^1(N') \\ \longrightarrow H_I^1(N) \longrightarrow H_I^1(N'') \longrightarrow H_I^2(N') \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

(iv) Nếu S là tập đóng nhân của R thì $S^{-1}(H_I^n(N)) \cong H_{S^{-1}I}^n(S^{-1}N)$.