ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ HƯƠNG

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VỚI HỆ SỐ TUẦN HOÀN

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN ỨNG DỤNG

2012

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Nhiều bài toán thực tế như các hệ cơ học, các hệ thống điện, hệ sinh thái, hệ động lực,…, thường được mô tả bởi các phương trình vi phân. Một lớp quan trọng của phương trình vi phân là lớp các phương trình vi phân với hệ số tuần hoàn. Định lý Floquet là một định lý cơ bản nhất trong lý thuyết phương trình vi phân với hệ số tuần hoàn.

Nghiên cứu các phương trình vi phân với hệ số tuần hoàn nói chung và lý thuyết Floquet nói riêng là một chủ đề được các nhà nghiên cứu quan tâm, vì đây là mô hình hay gặp trong thực tế, thí dụ, hệ thống các hành tinh trong hệ mặt trời, các dao động vật lý,..., là các hệ tuần hoàn.

Song hành với phương trình vi phân, lý thuyết phương trình sai phân cũng được nghiên cứu và phát triển, đặc biệt trong những năm gần đây (xem [5]). Phương trình sai phân không chỉ là một mô hình rời rạc của phương trình vi phân, mà còn là một mô hình toán học độc lập, rất nhiều bài toán thực tế (trong kinh tế, trong kĩ thuật,...) cũng có thể mô tả được bởi hệ phương trình sai phân.

Năm 1988, nhằm thống nhất nghiên cứu các hệ rời rạc và liên tục, Hilger [8] đã đưa ra khái niệm *thang thời gian*. Khái niệm thang thời gian của Hilger không những chỉ có ý nghĩa toán học, mà còn có ý nghĩa triết học sâu sắc. Nó cho phép thống nhất hai bản chất của chuyển động, đó là tính liên tục và tính rời rạc. Sau khi Hilger đưa ra khái niệm thang thời gian và nghiên cứu hệ động lực trên thang thời gian, một số nhà toán học đã quan tâm nghiên cứu và xây dựng lý thuyết Floquet đối với hệ động lực tuần hoàn trên thang thời gian.

Luận văn *Phương trình vi phân với hệ số tuần hoàn* có mục đích trình bày lý thuyết Floquet cho hệ phương trình vi phân thường tuyến tính với hệ số tuần hoàn và hệ động lực tuyến tính tuần hoàn trên thang thời gian tuần hoàn.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, luận văn gồm hai chương.

Chương 1: Lý thuyết Floquet cho phương trình vi phân thường.

Chương này trình bày các định nghĩa và tính chất cơ bản của hệ phương trình vi phân thường, phát biểu và chứng minh định lý Floquet đối với phương trình vi phân thường. Các kiến thức trình bày trong Chương này chủ yếu dựa vào các tài liệu [2], [3], [4].

Chương 2: Lý thuyết Floquet trên thang thời gian.

Chương 2 trình bày một số định nghĩa và tính chất về thang thời gian, hệ động lực tuyến tính trên thang thời gian, lý thuyết Floquet đối với hệ động lực tuyến tính tuần hoàn trên thang thời gian tuần hoàn và một số ví dụ áp dụng. Nội dung của Chương được trình bày theo các tài liệu [6], [7], có tham khảo thêm tài liệu [1].

Do thời gian và khả năng còn nhiều hạn chế nên luận văn này không thể tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quí báu của các thầy cô và các bạn đồng nghiệp.

LỜI CẢM ƠN

Tác giả trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Phòng đào tạo sau đại học, Trường Đại học khoa học, Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả hoàn thành khóa học sau đại học.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn cô giáo TS Nguyễn Thị Thu Thủy cùng các thầy cô giáo tham gia giảng dạy lớp cao học K4B khóa 2010-2012 đã đem hết nhiệt tình và tâm huyết của mình trang bị cho tác giả những kiến thức cơ sở.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn trường Phổ thông Hermann Gmeiner, Hải Phòng đã tạo nhiều điều kiện để tác giả có thời gian vừa hoàn thành nhiệm vụ giảng dạy tại trường, đồng thời hoàn thành tốt khóa học Thạc sĩ.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy giáo PGS TS Tạ Duy Phượng, Viện Toán học. Tác giả xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến các thành viên lớp cao học K4B đã luôn quan tâm, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập.

Xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đã ủng hộ, động viên và giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học cao học và thực hiện đề tài luận văn.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2012.

CHƯƠNG 1

LÝ THUYẾT FLOQUET

CHO HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

1.1 Các khái niệm cơ bản của phương trình vi phân thường

1.1.1 Hệ phương trình vi phân thường

Hệ phương trình vi phân thường là hệ phương trình dạng

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right), \ i = 1,2,...,n, \quad t \in I^+, \tag{1.1.1}$$

trong đó t là biến độc lập (chỉ thời gian), $I^+ = \{t : \underline{t} < t < \infty\}$ với $\underline{t} \in \mathbb{R}$ hoặc $\underline{t} = -\infty$. Các hàm số $f_i : G \to \mathbb{R}$, $i = 1,...,n$ cho trước, xác định trong nửa hình trụ $G = I^+ \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. D là tập mở trong không gian véc tơ n chiều thực $\mathbb{R}^n$ hoặc phức $\mathbb{C}^n$. Các hàm khả vi $x_1, x_2, ..., x_n$ là các hàm số cần tìm,

Kí hiệu

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = column\left(x_1,...,x_n\right); \ f\left(t,x\right) = \begin{bmatrix} f_1\left(t,x\right) \\ f_2\left(t,x\right) \\ \vdots \\ f_n\left(t,x\right) \end{bmatrix} = column\left(f_1(t,x),...,f_n(t,x)\right).$$

Khi đó (1.1.1) được viết dưới dạng phương trình vi phân vectơ:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t,x\right), \quad t \in I^+, \tag{1.1.2}$$

Thông thường, ta đòi hỏi nghiệm của phương trình vi phân (1.1.2) phải thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.1.3}$$

với $\left(t_0, x_0\right) \in G$ cho trước.

Định nghĩa 1.1.1 Hàm véc tơ thực hoặc phức $x = x(t)$ thuộc lớp hàm khả vi C^1 xác định trong khoảng $\left(a,b\right) \subset I^+$ và thỏa mãn phương trình (1.1.2)-(1.1.3) với mọi $a<t<b$, trong đó $\left(t_0,x_0\right)\in\left(a,b\right)\times D$, được gọi là *nghiệm* của phương trình vi phân (1.1.2), thỏa mãn *điều kiện ban đầu* (1.1.3).

Dưới đây nhắc lại định lý cơ bản về tồn tại và duy nhất nghiệm, là cơ sở để nghiên cứu tính chất ổn định nghiệm của hệ phương trình vi phân thường.

Hàm số Lipschitz Cho tập $G\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Hàm số $f:G\to\mathbb{R}^n$ được gọi là *Lipschitz đối với* x *đều theo* t nếu tồn tại số thực dương L sao cho

$$\left\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\right\|\le L\left\|x_1-x_2\right\|$$

với mọi $(t,x_1)\in G,(t,x_2)\in G$.

Hàm $f:G\to\mathbb{R}^n$, $G=\left(a,b\right)\times D\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ được gọi là hàm *Lipschitz địa phương đối với* x *đều theo* t nếu với mọi điểm $x\in D$ tồn tại một lân cận $V(x)\subset D$ của x sao cho f là *Lipschitz* đối với x đều theo t trong lân cận ấy, tức là

$$\left\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\right\|\le L\left\|x_1-x_2\right\|$$

với mọi $x_1,x_2\in V(x)$ và $t\in\left(a,b\right)$.

Định lý 1.1.1 (Định lý Picard-Lindelöp về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân)

Giả sử hàm $f:G\to\mathbb{R}^n$ *xác định và liên tục trên tập mở* $G\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, *thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo* x *đều theo* t *trên* G:

$$\left\|f(t,x_1)-f(t,x_2)\right\|\le L\left\|x_1-x_2\right\| \text{ với mọi } (t,x_1)\in G,(t,x_2)\in G.$$

Khi ấy với mỗi $(t_0,x_0)\in G$ *tìm được một số* $d>0$ *sao cho trên khoảng* $\left(t_0-d,t_0+d\right)$, *nghiệm của phương trình vi phân* (1.1.2) *thoả mãn điều kiện ban đầu* (1.1.3) *là tồn tại và duy nhất.*

Chúng ta có khái niệm ổn định nghiệm do Lyapunov đưa ra năm 1892 dưới đây.

Định nghĩa 1.1.2 Nghiệm $\eta(t), \left(t_0 < t < +\infty\right)$ của hệ phương trình (1.1.2)-(1.1.3) được gọi là *ổn định theo Lyapunov* khi $t \to +\infty$, nếu với mọi số dương ε cho trước và với mọi $t_0 \in \left(\underline{t};+\infty\right)$, tồn tại số dương $\delta = \delta\left(\varepsilon, t_0\right) > 0$ sao cho

1. Mọi nghiệm $x(t)$ của phương trình (1.1.2)-(1.1.3), kể cả nghiệm $\eta(t)$, thỏa mãn điều kiện

$$\left\| x(t_0) - \eta\left(t_0\right) \right\| < \delta, \tag{1.1.4}$$

phải *kéo dài được tới vô cùng*, tức là mọi nghiệm $x(t)$ có điều kiện ban đầu thỏa mãn (1.1.4) đều xác định trong khoảng $t_0 \le t < +\infty$, hay $x(t) \in D$ với mọi $t \in \left[t_0;+\infty\right)$.

2. Các nghiệm đó thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\left\| x(t) - \eta(t) \right\| < \varepsilon \text{ với mọi } t \in \left[t_0;+\infty\right). \tag{1.1.5}$$

Điều kiện (1.1.5) nói rằng, các nghiệm có điều kiện ban đầu $x\left(t_0\right)$ đủ gần $\eta\left(t_0\right)$ tại điểm t_0 phải mãi mãi (với mọi $t \ge t_0$) ở trong $\varepsilon-$ống có trục là $\eta\left(t\right)$.

Định nghĩa 1.1.3 Nghiệm $\eta(t), \left(t_0 < t < +\infty\right)$ của phương trình (1.1.2) được gọi là *ổn định đều* theo t_0 khi $t \to +\infty$ nếu với mọi số dương ε cho trước, tồn tại số dương $\delta = \delta\left(\varepsilon\right)$ không phụ thuộc vào t_0, sao cho với mọi $t_0 \in \left(a;+\infty\right)$, mọi nghiệm $x(t)$ của phương trình (1.1.2) thỏa mãn điều kiện ban đầu $\left\| x(t_0) - \eta\left(t_0\right) \right\| < \delta$ đều kéo dài được tới vô cùng (xác định trong khoảng $t_0 \le t < +\infty$) và thỏa mãn điều kiện (1.1.5).

Định nghĩa 1.1.4 Nghiệm $\eta(t), \left(t_0 < t < +\infty\right)$ của phương trình (1.1.2) được gọi là *không ổn định* theo Lyapunov khi $t \to +\infty$ nếu tồn tại một số $\varepsilon_0 > 0$ và một thời điểm $t_0 \in I^+$ sao cho, với mọi số $\delta > 0$, tồn tại ít nhất một nghiệm $x(t)$ của phương trình (1.1.2) và tồn tại một thời điểm $t_1 > t_0$ sao cho $\left\| x(t_0) - \eta\left(t_0\right) \right\| < \delta$ nhưng $\left\| x(t_1) - \eta\left(t_1\right) \right\| \geq \varepsilon_0$.

Điều này có nghĩa là, tồn tại một thời điểm $t_1 > t_0$ để nghiệm $x(t)$ vượt ra khỏi $\varepsilon -$ống có trục là $\eta\left(t\right)$.

Định nghĩa 1.1.5 Nghiệm $\eta(t), \left(t_0 < t < +\infty\right)$ của phương trình (1.1.2) được gọi là *ổn định tiệm cận* khi $t \to +\infty$ nếu:

1. Nghiệm $\eta(t), \left(t_0 < t < +\infty\right)$ là ổn định theo Lyapunov khi $t \to +\infty$ và

2. Với mỗi $t_0 \in I^+$ tồn tại $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ sao cho tất cả các nghiệm $x(t),\ (t_0 \leq t < +\infty)$ thỏa mãn điều kiện $\left\| x(t_0) - \eta\left(t_0\right) \right\| < \Delta$ đều có tính chất:

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| x(t) - \eta(t) \right\| = 0. \tag{1.1.6}$$

Bằng phép đổi biến $y(t) = x(t) - \eta(t)$, ta có thể đưa hệ phương trình (1.1.2) về phương trình dạng $\dot{y}(t) = \tilde{f}\left(t, y\right)$, với $\tilde{f}(t,0) \equiv 0$. Do đó ta luôn có thể giả thiết $f(t,0) \equiv 0$. Khi ấy (1.1.2) có *nghiệm tầm thường* (nghiệm cân bằng) $\eta(t) \equiv 0$. Các định nghĩa (1.1.2)-(1.1.5) có thể phát biểu gọn gàng hơn cho nghiệm $\eta(t) \equiv 0$. Thí dụ, ta nói nghiệm tầm thường $\eta(t) \equiv 0$ của phương trình (1.1.2) với $f(t,0) \equiv 0$ là *ổn định tiệm cận* nếu nó ổn định theo Lyapunov và với mỗi $t_0 \in I^+$ tồn tại $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ sao cho tất cả các nghiệm $x(t), (t_0 \leq t < +\infty)$ thỏa mãn điều kiện $\left\| x(t_0) \right\| < \Delta$ ta đều có $\lim_{t \to +\infty} \left\| x(t) \right\| = 0$.

Với mỗi t_0 cho trước, hình cầu $\left\| x(t_0) \right\| < \Delta$ được gọi là *miền hút* về vị trí cân bằng $\eta(t) \equiv 0$ của hệ (1.1.2).

Định nghĩa 1.1.6 Giả sử phương trình (1.1.2) xác định trong nửa không gian $G = I^+ \times \mathbb{C}^n$. Khi đó nếu nghiệm $\eta(t), \left(\underline{t} < t < +\infty\right)$ của phương trình (1.1.2) ổn định tiệm cận khi $t \to +\infty$ và mọi nghiệm $x(t)$, $(t_0 \le t < +\infty)$ đều thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{t\to+\infty} \|x(t) - \eta(t)\| = 0$ thì $\eta(t)$ được gọi là *ổn định tiệm cận trong toàn thể.*

Như vậy nghiệm $\eta(t)$ ổn định tiệm cận trong toàn thể nếu tại thời điểm ban đầu t_0 tùy ý, miền hút của nghiệm đó là toàn thể không gian $\mathbb{C}^n$.

Cùng với hệ (1.1.2) ta xét hệ có nhiễu tác động thường xuyên:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x\right) + \varphi(t, x), \tag{1.1.7}$$

trong đó ta luôn giả thiết $f(t,x) \in C^{0,1}\left(G\right), \varphi(t,x) \in C^{0,1}\left(G\right)$ là các hàm liên tục theo biến t và khả vi theo biến x.

Định nghĩa 1.1.7 Nghiệm $\eta(t), \left(\underline{t} < t < +\infty\right)$ của phương trình (1.1.2) được gọi là *ổn định với nhiễu tác động thường xuyên* $\varphi(t,x)$, nếu với mọi $\varepsilon > 0$ và với mọi $t_0 \in I^+$, tồn tại số $\delta = \delta\left(t_0, \varepsilon\right) > 0$ sao cho khi $\left\|\varphi\left(t,x\right)\right\| < \delta$, mọi nghiệm $x(t)$ của hệ (1.1.7) thỏa mãn điều kiện $\left\|x(t_0) - \eta\left(t_0\right)\right\| < \delta$ cũng đều xác định trên khoảng $(t_0 \le t < +\infty)$ và thỏa mãn điều kiện $\|x(t) - \eta(t)\| < \varepsilon$ với mọi $t \in \left[t_0; +\infty\right)$.

1.1.2 Hệ phương trình vi phân thường tuyến tính

Xét hệ phương trình vi phân thường tuyến tính dạng

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(t\right)x_k + f_i\left(t\right), i = \overline{1,n}, \tag{1.1.8}$$

trong đó $a_{ik}\left(.\right), f_i\left(.\right) \in C(I^+)$, tức là các hệ số $a_{ik}\left(.\right)$ của x_k và các số hạng tự do $f_i\left(.\right)$ của hệ (1.1.8) là các hàm số liên tục trên khoảng $I^+ = \left(\underline{t}; +\infty\right)$. Nếu không có chú thích gì khác, ta luôn giả thiết các hàm số $a_{ik}\left(t\right), f_i\left(t\right)$ nhận giá trị thực và $x_i(t), i = 1, ..., n$ là các ẩn hàm cần tìm cũng nhận các giá trị thực.

Nếu đưa vào các kí hiệu: