BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC
VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

NGUYỄN ĐÌNH DŨNG

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ ĐẶT KHÔNG CHỈNH

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội – 2014

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

NGUYỄN ĐÌNH DŨNG

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TOÁN TỬ ĐẶT KHÔNG CHỈNH

Chuyên ngành: Toán học tính toán
Mã số: 62.46.30.01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Tập thể hướng dẫn khoa học:

1. GS.TS. Nguyễn Bường

2. TS. Nguyễn Công Điều

Hà Nội – 2014

Mục lục

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn của GS.TS. Nguyễn Bường và TS. Nguyễn Công Điều.

Các kết quả trình bày trong luận án là hoàn toàn trung thực và chưa từng được công bố trong các công trình của người khác.

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Đình Dũng

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thành tại Viện Công nghệ Thông tin thuộc Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam dưới sự hướng dẫn của GS.TS. Nguyễn Bường và TS. Nguyễn Công Điều. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới các thầy cô giáo thuộc Viện Công nghệ Thông tin đã tạo điều kiện và giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận án tại Viện, đặc biệt tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS. Nguyễn Bường và TS. Nguyễn Công Điều, những người thầy đã tận tình hướng dẫn và cung cấp nhiều tài liệu cần thiết để tác giả có thể hoàn thành luận án đúng thời hạn.

Tác giả xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo thuộc Đại học Thái Nguyên và Ban Đào tạo - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện tốt nhất cho tác giả trong thời gian làm nghiên cứu sinh.

Xin chân thành cảm ơn anh chị em nghiên cứu sinh và bạn bè đồng nghiệp đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận án tại Viện Công nghệ Thông tin.

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Đình Dũng

MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

$\mathbb{R}^n$	Không gian Ơcơlit n-chiều.
X^*	Không gian liên hợp của không gian Banach X.
$A^* : Y^* \to X^*$	Toán tử đối ngẫu của toán tử $A : X \to Y$.
H	Không gian Hilbert.
I	Toán tử đơn vị.
$D(A)$	Miền xác định của toán tử A.
$R(A)$	Miền ảnh của toán tử A.
A^{-1}	Toán tử ngược của toán tử A.
$A'(x)$	Đạo hàm Fréchet của toán tử A tại điểm x.
$\langle x, y \rangle$	Tích vô hướng của x và y trong không gian Hilbert.
$\|x\|_X$	Chuẩn của x trong không gian X.
$\rho_X(x, y)$	Metric của x và y trong không gian X.
$a \sim b$	a tương đương với b.
$C[a, b]$	Không gian các hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$.
$\emptyset$	Tập rỗng.
$x_n \rightharpoonup x$	Dãy x_n hội tụ yếu tới x.
$x_n \to x$	Dãy x_n hội mạnh tới x.
θ	Phần tử không trong không gian Banach.
$\mathcal{S}(x_*, r)$	Hình cầu mở tâm x_* bán kính r trong không gian Banach .
$\mathcal{N}(A)$	Không gian không điểm của toán tử A.

Mở đầu

Trong những bài toán nảy sinh từ thực tế, tồn tại một lớp các bài toán mà nghiệm không ổn định theo nghĩa một thay đổi nhỏ của dữ liệu đầu vào sẽ dẫn đến những thay đổi lớn của dữ liệu đầu ra (nghiệm của bài toán), thậm chí còn làm cho bài toán trở lên vô nghiệm. Lớp các bài toán trên được gọi là lớp bài toán không chính qui hay bài toán đặt không chỉnh.

Khái niệm bài toán đặt chỉnh được Hadamard,J. [45] đưa ra khi nghiên cứu về ảnh hưởng của các điều kiện biên lên nghiệm của các phương trình elliptic cũng như parabolic. Xét bài toán tìm nghiệm của phương trình

$$A(x) = f, \tag{1}$$

ở đây, A là toán tử từ không gian metric X vào không gian metric Y. Theo Hadamard bài toán (1) được gọi là đặt chỉnh (chính qui) nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

1. Phương trình (1) có nghiệm x_0 với mọi $f \in Y$;
2. Nghiệm x_0 được xác định một cách duy nhất;
3. Nghiệm x_0 phụ thuộc liên tục vào f.

Một thời gian dài người ta nghĩ rằng mọi bài toán đặt ra đều thỏa mãn cả ba điều kiện trên. Nhưng thực tế chỉ ra rằng ý niệm đó sai lầm.

Nhất là khi máy tính điện tử ra đời, trong tính toán các bài toán thực tế bằng máy tính luôn xảy ra quá trình làm tròn số. Chính sự làm tròn đó dẫn đến những sai lệch đáng kể.

Nếu ít nhất một trong ba điều kiện trên không được thỏa mãn thì bài toán (1) được gọi là bài toán đặt không chỉnh. Do lớp bài toán đặt không chỉnh có tầm quan trọng trong ứng dụng thực tế, nên nó đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học nổi tiếng trên thế giới như V. K. Ivanov, M. M. Lavrentiev, A. N. Tikhonov...Một số nhà toán học Việt Nam cũng đi sâu nghiên cứu và có nhiều đóng góp cho lý thuyết các bài toán đặt không chỉnh như: P. K. Anh, Ng. Bường, Đ. N. Hào, Đ. Đ. Trọng...

Để giải số bài toán đặt không chỉnh, bước đầu tiên Tikhonov đưa về bài toán đặt chỉnh bằng cách giả thiết là nghiệm cần tìm nằm vào trong một tập compact lồi M và ảnh $A(M) = N$, sao cho khi f xấp xỉ bởi $f_\delta \in N$ ta vẫn có nghiệm x_δ thỏa mãn $Ax_\delta \in N$. Do số liệu xấp xỉ là số liệu không chính xác, nên có thể xấp xỉ f_δ lại không nằm vào tập $A(M)$. Khi đó, phương trình $A(x) = f_\delta$ không có nghiệm theo nghĩa thông thường. Để khắc phục tình trạng này, Ivanov,V.K. (xem [51], [52]) đã đưa ra khái niệm tựa nghiệm cho phương trình (1). Theo Ivanov phần tử $\tilde{x} \in M$ làm cực tiểu phiếm hàm $\inf\limits_{x\in M} \rho_Y(A(x), f)$ được gọi là tựa nghiệm của (1) trên tập M, trong trường hợp M là tập compact của X, thì với mọi $f \in Y$ bao giờ cũng tồn tại tựa nghiệm. Nếu $f \in A(M)$ thì tựa nghiệm chính là nghiệm thông thường. Tựa nghiệm cũng như nghiệm thông thường có thể không duy nhất.

Trường hợp vế phải phương trình (1) thay đổi không nằm trong $A(M)$

cũng được Lavrentiev, M.M. [60] nghiên cứu. Tư tưởng phương pháp mà Lavrentiev đề xuất là thay phương trình (1) bằng phương trình xấp xỉ giải được với mọi vế phải và nghiệm của phương trình xấp xỉ phụ thuộc liên tục vào vế phải.

Năm 1963, Tikhonov, A. N. (xem [75], [76], [77]) đưa ra một hướng mới giải quyết bài toán (1), đó là việc cực tiểu hóa phiếm hàm phụ thuộc tham số

$$M^\alpha[x, f_\delta] = \rho^2(A(x), f_\delta) + \alpha\psi(x), \tag{2}$$

ở đây ψ là phiếm hàm ổn định trên không gian metric X, α là tham số hiệu chỉnh phụ thuộc δ, $\alpha = \alpha(\delta)$ được chọn sao cho khi $\delta \to 0$, ta có $\alpha(\delta) \to 0$ và điểm cực tiểu x_α^δ của phiếm hàm (2) hội tụ đến nghiệm của bài toán (1).

Đối với bài toán (1), khi $A : H \to H$ là một toán tử liên tục và đóng yếu, Engl, H.W. [42] đã xét dạng cụ thể của (2) là

$$M^\alpha[x, f_\delta] = \|Ax - f_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \tag{3}$$

và chứng minh được bài toán (3) có nghiệm phụ thuộc liên tục vào f_δ và hội tụ về nghiệm của (1) khi $f_\delta \to f$.

Trong trường hợp A là toán tử đơn điệu và hemi liên tục từ không gian Bannach X vào X^*, Alber,Ya.I.[5] đã xây dựng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov dựa vào việc giải phương trình

$$A(x) + \alpha U^s(x) = f_\delta, \tag{4}$$

ở đây, U^s là toán tử đối ngẫu tổng quát của X, tức là $U^s : X \to X^*$, thỏa mãn điều kiện

$$\langle U^s(x), x\rangle = \|x\|\|U^s(x)\|, \; \|U^s(x)\| = \|x\|^{s-1}, \; s \geq 2.$$