ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

NGUYỄN THỊ THANH HƯƠNG

# HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

-----------

NGUYỄN THỊ THANH HƯƠNG

# HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên nghành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

# Mục lục

# Mở đầu

Chuyên đề "Hệ phương trình và hệ bất phương trình chứa căn thức" là một phần quan trọng của chương trình Toán ở bậc THPT. Các bài toán về phương trình, bất phương trình, hệ phương trình và hệ bất phương trình chứa căn thức có thể xem như những dạng toán cơ bản của chương trình đại số bậc THPT. Mỗi bài toán có thể có nhiều cách giải. Tuy nhiên, trong luận văn này chỉ tập trung đề cập đến các phương pháp giải hệ phương trình và hệ bất phương trình chứa căn thức. Nhiều phương pháp chính thống khác như phương pháp biểu diễn hàm số, phương pháp hệ tuyến tính,..., không đề cập trong luận văn này. Các phương pháp giải toán ở đây chủ yếu có tính định hướng chung cho những lớp bài toán cơ bản nhất thường xuất hiện trong các kì thi Học sinh giỏi và Olympic toán bậc THPT. Luận văn gồm phần mở đầu, ba chương, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị.

Trong chương này trình bày các khái niệm đa thức đối xứng và phản đối xứng, tính chất của đa thức đối xứng, một số tính toán và ước lượng biểu thức chứa căn thức.

Chương 2. Hệ phương trình chứa căn thức.

Dựa trên tính chất đa thức đối xứng, chương này trình bày khái niệm, phương pháp giải phương trình chứa căn thức, hệ phương trình đối xứng loại 1, loại 2. Ngoài ra, trong chương này còn trình bày một số hệ phương trình đặc biệt chứa căn thức.

Chương 3. Hệ bất phương trình chứa căn thức.

Chương này trình bày khái niệm, phương pháp giải bất phương trình chứa căn thức, hệ bất phương trình đối xứng. Ngoài ra chương này còn trình bày một số hệ bất phương trình đặc biệt chứa căn thức.

Trong thời gian thực hiện luận văn này, tôi đã nhận được sự chỉ dẫn tận tình, chu đáo của Giáo sư - Tiến sĩ Khoa học Nguyễn Văn Mậu. Tôi xin bày

tỏ lòng biết ơn sâu sắc của mình tới thầy đã giúp tôi hoàn thành luận văn.

Tôi chân thành cảm ơn Ban giám hiệu và các bạn đồng nghiệp Trường THPT Thủy Sơn - Hải Phòng đã nhiệt tình giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn này.

Tác giả

# Chương 1

# Một số kiến thức chuẩn bị

## 1.1. Các tính chất cơ bản của đa thức đối xứng và phản đối xứng

### 1.1.1. Đa thức đối xứng

**Định nghĩa 1.1.** Giả sử $A$ là một miền nguyên, một đa thức $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, được gọi là một đa thức đối xứng nếu và chỉ nếu với mọi phép thế $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, ta có $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ trong đó $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ suy ra từ $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bằng cách thay $x_l$ bởi $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$.

### 1.1.2. Một số dạng đa thức đối xứng sơ cấp Viète

**Định nghĩa 1.2.** Cho $\overline{a}$ là bộ $n$ số $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $(n \geq 1,\ n \in \mathbb{N})$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n) \\ &= x^n + E_1(\overline{a})x^{n-1} + E_2(\overline{a})x^{n-2} + \cdots + E_n(\overline{a}). \end{aligned}$$

Trong đó $E_0(\overline{a}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\,, \quad E_2(\overline{a}) = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j\,, \quad E_n(\overline{a}) = a_1 a_2 \ldots a_n.$
Đặt $E_0(\overline{a}) = 1$.
Ta gọi $E_r(\overline{a})(r \in (1, \ldots, n))$ là các hàm (đa thức) đối xứng sơ cấp thứ $r$ ($E_r(\overline{a})$ là tổng của tất cả các tích $r$ số khác nhau của bộ số $\overline{a}$.)
Kí hiệu

$$P_r(\overline{a}) = \frac{r!(n-r)!}{n!} E_r(\overline{a}).$$

**Định nghĩa 1.3.** Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là bộ $n$ các số thực không âm (kí hiệu bởi $(\overline{x})$ và $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là bộ các số thực không âm khác được kí hiệu bởi $(\overline{y})$).

Hai dãy $(\overline{x})$ và $(\overline{y})$ được gọi là đồng dạng (và kí hiệu $(\overline{x}) \sim (\overline{y})$ nếu tồn tại $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \neq 0)$ sao cho ta có $x_j = \lambda y_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$).

### 1.1.3. Đa thức đối xứng ba biến

Đa thức $F(x, y, z)$ với bộ 3 biến thực $x, y, z$ được hiểu là hàm số có dạng

$$F(x, y, z) = \sum_{s=0}^{N} M_s(x, y, z), \tag{1.1}$$

trong đó

$$M_s(x, y, z) = \sum_{i+j+k=s} a_{ijk} x^i y^j z^k, \quad i, j, k \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

**Định nghĩa 1.4.** Nếu $F(x', y', z') = F(x, y, z)$, trong đó $(x', y', z')$ là một hoán vị tùy ý của $(x, y, z)$ thì ta gọi $F(x, y, z)$ là một đa thức đối xứng.

## 1.2. Một số tính chất khác của đa thức đối xứng

Phép giải nhiều bài toán của đại số sơ cấp sẽ trở nên dễ dàng nếu ta biết lợi dụng tính đối xứng trong các giả thiết của bài toán. Qua những thí dụ cụ thể dưới đây ta sẽ thấy lí thuyết đối xứng được áp dụng như thế nào để giải theo một phương pháp thống nhất nhiều loại bài toán của đại số sơ cấp.

### 1.2.1. Phân tích đa thức thành nhân tử

**Ví dụ 1.1.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử (trên $\mathbb{R}$)

$$f(x, y) = 6x^4 - 11x^3y - 18x^2y^2 - 11xy^3 + 6y^4.$$

***Lời giải.*** Ta có

$$f(x, y) = 6(x^4 + y^4) - 11xy(x^2 + y^2) - 18x^2y^2$$

$$\begin{aligned} &= 6(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) - 11\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 18\sigma_2^2 \\ &= 6\sigma_1^4 - 35\sigma_1^2\sigma_2 + 16\sigma_2^2 \end{aligned}$$

Vế phải là một tam thức bậc hai đối với $\sigma_2$.
Nó có các nghiệm là $\sigma_2 = 2\sigma_1^2$, $\sigma_2 = \dfrac{3}{16}\sigma_1^2$.
Vì vậy ta có $f = 16(\sigma_2 - 2\sigma_1^2)\left(\sigma_2 - \dfrac{3}{16}\sigma_1^2\right) = (2\sigma_1^2 - \sigma_2) \times (3\sigma_1^2 - 16\sigma_2)$.
Từ đó

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left[2(x+y)^2 - xy\right]\left[3(x+y)^2 - 16xy\right] \\ &= \left(2x^2 + 3xy + 2y^2\right)\left(3x^2 - 10xy + 3y^2\right). \end{aligned}$$

Nhân tử thứ nhất có nghiệm phức, ta để nguyên. Nhân tử thứ hai phân tích thành $3x^2 - 10xy + 3y^2 = (x - 3y)(3x - y)$.
Vậy ta có $f(x,y) = \left(2x^2 + 3xy + 2y^2\right)(x - 3y)(3x - y)$.

### 1.2.2. Chứng minh hằng đẳng thức

**Ví dụ 1.2.** Chứng minh hằng đẳng thức

$$(x+y+z)(xy+xz+yz) - xyz = (x+y)(x+z)(y+z).$$

***Lời giải.*** Ta có vế trái là $\sigma_1\sigma_2 - \sigma_3$. Mở các dấu ngoặc trong vế phải ta được:

$$\begin{aligned} (x+y)(x+z)(y+z) &= x^2y + x^2z + y^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz \\ &= (\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) + 2\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_3. \end{aligned}$$

**Ví dụ 1.3.** Chứng minh rằng nếu $x + y + z = 0$ thì

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy + xz + yz)^2.$$

***Lời giải.*** Ta có $x^4 + y^4 + z^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$.
Theo giả thiết $x + y + z = 0$, vậy nên

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2\sigma_2^2 = 2(xy + xz + yz)^2.$$

### 1.2.3. Chứng minh bất đẳng thức

***I. Trường hợp hai biến.***

Ta có thể áp dụng có kết quả các đa thức đối xứng để chứng minh nhiều bất đẳng thức. Cơ sở của phương pháp này là chú ý sau:

Giả sử $\sigma_1, \sigma_2$ là những số thực. Muốn cho các số $x, y$ xác định bởi các điều kiện: $\begin{cases} x + y = \sigma_1 \\ xy \ = \sigma_2 \end{cases}$ là các số thực, điều kiện cần và đủ là $\Delta = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0$.

Muốn cho $x, y$ là các số thực và không âm điều kiện cần và đủ là

$$\Delta = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 > 0\,, \quad \sigma_1 \geq 0\,, \quad \sigma_2 \geq 0.$$

Giả sử đã cho một đa thức đối xứng $f(x, y)$ và cần phải chứng minh rằng với những giá trị thực bất kì $x, y$ (hoặc với những giá trị không âm bất kì, hoặc với $x + y \geq a$, tùy theo các điều kiện của bài toán, đa thức $f(x, y)$ lấy những giá trị không âm $f(x, y) \geq 0$). Muốn vậy trước hết ta phải thay $f(x, y)$ bởi biểu thức của nó qua $\sigma_1$ và $\sigma_2$. Rồi trong đa thức tìm được ta thay $\sigma$ bởi biểu thức của nó qua $\sigma_1$ và số không âm $\Delta = \sigma_1^2 - 4\sigma_2$, tức là ta đặt $\sigma_2 = \dfrac{1}{4}(\sigma_1^2 - \Delta)$. Kết quả là ta thu được một đa thức của $\sigma_1$ và $\Delta$, và ta phải chứng minh rằng với những giá trị không âm của $z$ và với những điều kiện về $\sigma_1$ đã cho, đa thức đó chỉ lấy những giá trị không âm. Thông thường cách làm này dễ hơn chứng minh bất đẳng thức đã cho.

**Ví dụ 1.4.** Chứng minh rằng nếu $a, b$ là những số thực thỏa mãn điều kiện $a + b \geq c$ và $c \geq 0$ thì ta có bất đẳng thức:

$$a^2 + b^2 \geq \frac{c^2}{2}; \quad a^4 + b^4 \geq \frac{c^4}{8}; \quad a^8 + b^8 \geq \frac{c^8}{128}.$$

***Lời giải.*** Ta có

$$a^2 + b^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2.\frac{1}{4}\left(\sigma_1^2 - \Delta\right) = \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{1}{2}\Delta.$$

Vì $\Delta \geq 0$ và theo điều kiện đã cho $\sigma_1 \geq c$, nên

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}c^2.$$

Áp dụng kết quả đó ta được

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}c^2\right)^2 = \frac{1}{8}c^4.$$

$$a^8 + b^8 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}c^4\right)^2 = \frac{1}{128}c^8.$$