ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ VĂN CÔNG

MỘT CẢI TIẾN CÁCH CHỌN VÉC TƠ ĐƯA VÀO CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP NÓN XOAY GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TR- ỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ VĂN CÔNG

MỘT CẢI TIẾN CÁCH CHỌN VÉC TƠ ĐƯA VÀO CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP NÓN XOAY GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60 46 01 12

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN ANH TUẤN

Thái Nguyên, 2014

Mục lục

Mở đầu

Như chúng ta đã biết, bài toán quy hoạch tuyến tính (QHTT) có hai dạng cơ bản là dạng chuẩn và dạng chính tắc, hai dạng này có quan hệ mật thiết với nhau. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn là bài toán có miền ràng buộc là một hệ bất phương trình tuyến tính, còn bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc là bài toán quy hoạch có miền ràng buộc là một hệ phương trình tuyến tính với các biến của nó có dấu không âm. Trong thế kỷ trước, cùng với sự phát triển mạnh mẽ của công nghệ thông tin, lý thuyết tối ưu đã có những bước tiến lớn, trong đó phải nói đến các phương pháp và các thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính, gắn liền với tên tuổi của nhiều nhà toán học như L.V. Kantorovich (1939), George Dantzig (1947), Lemke (1954), Leonid Khachian (1979), Karmarkar (1984), ...

Nội dung của luận văn là đề nghị một quy tắc chọn chỉ số đưa vào cơ sở trong thuật toán nón xoay tuyến tính trình bày ở cuốn sách [5] giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính. Cụ thể là chúng ta đề nghị một quy tắc chọn chỉ số ràng buộc đưa vào cơ sở mới thay cho cơ sở cũ làm cho số bước lặp đi tới lời giải là giảm đi.

Luận văn gồm 2 chương:

Chương 1: Trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát và hai dạng cơ bản của bài toán quy hoạch tuyến tính là dạng chính tắc và dạng chuẩn với hai phương pháp giải bài toán quy hoạch tuyến tính là phương pháp đơn hình và phương pháp nón xoay.

Chương 2: Nội dung dựa trên phương pháp nón xoay tuyến tính trình bày trong chương 1, đề nghị một quy tắc MAX giải bài toán quy hoạch tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính và ví dụ bằng số minh họa.

Luận văn này hoàn thành dựa trên cuốn sách “Quy hoạch tuyến tính với phương pháp nón xoay” [5] và trên các sách, tài liệu có trong phần tài liệu tham khảo.

Tác giả

Vũ Văn Công

Chương 1

Bài toán quy hoạch tuyến tính và phương pháp giải

Trong chương này chúng tôi trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát và hai dạng của bài toán quy hoạch tuyến tính là dạng chính tắc và dạng chuẩn. Sau đó trình bày phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc và phương pháp nón xoay giải bài toán quy hoạch tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính.

1. Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát

Để nhất quán lập luận ta xét bài toán tìm cực đại, sau đó ta sẽ xét cách chuyển bài toán tìm cực tiểu sang tìm cực đại.

Bài toán tổng quát của quy hoạch tuyến tính có dạng:

$$f(x) = \langle C, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i . x_i \to max \qquad (1.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j (\leq, =, \geq) b_i,\ i = 1, 2, ..., m \qquad (1.2)$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., n. \qquad (1.3)$$

Nếu gặp bài toán Min, tức là:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$x \in D$$

Thì giữ nguyên ràng buộc và đưa về bài toán Max bằng cách:

$$\overline{f(x)} = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$x \in D$$

Nếu bài toán Max có phương án tối ưu là x^* thì bài toán Min cũng có phương án là x^* và $f_{\min} = -\overline{f_{max}}$.

Thật vậy, vì x^* là phương án tối ưu của bài toán Max nên ta có:

$$\overline{f_{max}} = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \geq -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \forall x \in D$$

Hay

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \forall x \in D$$

Chứng tỏ x^* là phương án tối ưu của bài toán Min và

$$f_{\min} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = -\overline{f_{max}}\ .$$

1.1. Dạng chuẩn và dạng chính tắc

Người ta thường xét bài toán quy hoạch tuyến tính dưới hai dạng sau:

- Dạng chuẩn:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1,...,m$$
$$x_j \geq 0, j = 1,...,n$$

- Dạng chính tắc:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, i = 1,...,m$$
$$x_j \geq 0, j = 1,...,n$$

1.2. Đưa bài toán QHTT về dạng chuẩn hoặc chính tắc

Bất kỳ quy hoạch tuyến tính nào cũng có thể đưa về một trong hai dạng chuẩn hoặc chính tắc nhờ phép biến đổi tuyến tính sau:

1. Một ràng buộc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq b_i$$

Có thể đưa về ràng buộc:

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -b_i \quad ,$$

bằng cách nhân hai vế với (-1) và viết lại

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{'} x_j \leq b_i^{'} \ .$$

2. Một ràng buộc đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

Có thể thay bằng hai ràng buộc bất đẳng thức:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i ; -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq -b_i \ .$$

3. Một biến x_j không bị ràng buộc dấu có thể thay bởi hiệu của hai biến không âm bằng cách đặt: $x_j = x_j^{+} - x_j^{-}$ với $x_j^{+} \geq 0, x_j^{-} \geq 0$.

4. Một ràng buộc bất đẳng thức

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

Có thể đưa về ràng buộc đẳng thức bằng cách đưa vào biến phụ $y_i \geq 0$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i \ .$$

Về nguyên tắc, áp dụng nhiều lần các phép biến đổi 1, 2 và 3 ta có thể đưa một bài toán quy hoạch tuyến tính bất kỳ về dạng chuẩn, sau đó áp dụng nhiều lần phép biến đổi 4 ta sẽ đưa nó về dạng chính tắc.

2. Phương pháp đơn hình và phương pháp nón xoay

Trong mục này chúng tôi trình bày sơ lược về phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc và phương pháp nón xoay [5] giải bài toán quy hoạch tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính.

2.1. Phương pháp đơn hình giải bài toán QHTT dạng chính tắc

Phương pháp đơn hình giải bài toán QHTT dạng chính tắc do nhà toán học Dantzig người Mỹ đề xuất năm 1947, sau đây chúng tôi xin tóm tắt sơ lược phương pháp này.

Xét bài toán QHTT dạng chính tắc sau:

$$< c, x > \rightarrow \max \tag{1.4}$$

$$Ax = b \tag{1.5}$$

$$x \geq 0 \tag{1.6}$$

Trong đó A là ma trận kích thước $m.n$, với $m \leq n$ và hạng của ma trận A bằng m. Cơ sở của thuật toán đơn hình chúng ta có thể xem trong sách [3]. Để ngắn gọn chúng tôi chỉ trình bày tóm tắt các bước giải của thuật toán đơn hình dưới đây như sau:

Thuật toán đơn hình

Bước 1: Xây dựng bảng đơn hình xuất phát. Tìm một phương án cực biên xuất phát x và cơ sở của nó $A_j, j \in J$

- Xác định các số z_{jk} bởi hệ phương trình:

$$\sum_{j \in J} z_{jk} A_j = A_k \tag{1.7}$$

- Đối với mỗi $k \notin J$, tính các ước lượng:

$$\Delta_k = \sum_{j \in J} z_{jk} c_j - c_k \tag{1.8}$$

Còn với $j \neq 0$ thì $\Delta_j = 0$.

- Tính giá trị hàm mục tiêu

$$Z_0 = \sum_{j \in J} c_j x_j \ .$$

Bước 2: Kiểm tra tối ưu

Nếu $\Delta_k \geq 0, k \notin J$ thì x là phương án tối ưu, dừng thuật toán. Trái lại, chuyển sang bước 3.

Bước 3: Tìm véctơ đưa vào cơ sở . Có hai khả năng xảy ra:

- Tồn tại $k \notin J$ sao cho $\Delta_k < 0$ và $z_{jk} \leq 0, j \in J$ thì bài toán QHTT không có lời giải tối ưu (Z không bị chặn trên). Dừng thuật toán.
- Đối với mỗi $k \notin J$ sao cho $\Delta_k < 0$ đều tồn tại $j \in J : z_{jk} > 0$. Khi đó chọn chỉ số s theo tiêu chuẩn:

  $$\Delta_s = \min\left\{\Delta_k / \Delta_k < 0\right\} \tag{1.9}$$

  Đưa véctơ A_s vào cơ sở.

Bước 4: Tìm véctơ loại khỏi cơ sở. Xác định

$$\theta_r = \min\left\{\frac{x_j}{z_{rs}} / z_{jk} > 0\right\} = \frac{x_r}{z_{rs}} \tag{1.10}$$

Và đưa véctơ A_r ra khỏi cơ sở.

Bước 5: Chuyển sang phương án cực biên mới và cơ sở mới. Cơ sở mới là $\left\{A_j, j \in J^{'}\right\}$ với $J^{'} = J \setminus \{r\} \cup \{s\}$. $\forall j \in J^{'}$ các thành phần của phương án cực biên mới $x^{'}$ được tính theo công thức:

$$x_j^{'} = \begin{cases} x_j - (x_r / z_{rs}) z_{js}, \ \textit{nếu } j \neq s \\ \quad x_r / z_{rs}, \qquad \textit{nếu } j = s \end{cases} \tag{1.11}$$

Khai triển của các véctơ A_k theo các véctơ cơ sở mới được tính theo công thức (1.12). Quay lên bước 2.