ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THỊ HƯƠNG

VỀ BÀI TOÁN CỰC ĐẠI HÀM LỒI VÀ ỨNG DỤNG CỦA NÓ

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nghiêm túc, nhiệt tình của GS.TSKH. Lê Dũng Mưu (Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam). Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy và kính chúc Thầy cùng gia đình luôn mạnh khỏe.

Tôi xin chân thành cảm ơn các quý thầy, cô giảng dạy tại Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đã mang lại cho tôi nhiều kiến thức và quan tâm giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu.

Tôi cũng xin cảm ơn các bạn cùng lớp đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập tại Đại học Thái Nguyên và trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Cuối cùng, con xin cảm ơn bố mẹ. Nhờ có bố mẹ gian khó, vất vả tạo mọi điều kiện tốt nhất để con có được thành quả ngày hôm nay.

Thái Nguyên, tháng 6 - 2014

Người viết Luận văn

Hoàng Thị Hương

Mở đầu

Giải tích lồi là một phần quan trọng của toán học. Hầu hết các ngành như tối ưu hóa, giải tích hàm, hình học, toán kinh tế,... đều liên quan đến lý thuyết về các tập lồi và hàm lồi. Đã có rất nhiều nhà toán học nghiên cứu về vấn đề này và đưa ra nhiều lý thuyết cũng như ứng dụng thực tế. Một trong những tính chất cơ bản của hàm lồi cho chúng ta sử dụng rộng rãi trong bài toán tối ưu đó là tính chất đạt giá trị cực đại trên biên.

Trong toán học ứng dụng ta thường gặp bài toán tìm cực đại của hàm lồi trên một tập lồi. Bài toán này có nhiều ứng dụng trong thực tế, hơn nữa một số bài toán khác của tối ưu toàn cục có thể quy về bài toán này. Bài toán này có những tính chất rất cơ bản, tuy nhiên tính chất quan trọng của bài toán cực đại hàm lồi trên một tập lồi vẫn là nghiệm tối ưu (toàn cục) luôn đạt trên một điểm cực biên. Lợi dụng tính chất này, người ta đã đưa ra các thuật toán giải bài toán trên.

Mục đích của luận văn này là giới thiệu bài toán cực đại hàm lồi trên tập lồi đa diện, trong đó ta đi trình bày điều kiện nghiệm tối ưu và các tính chất của bài toán. Tiếp đó là trình bày ba thuật toán cơ bản để giải bài toán trên. Cụ thể luận văn trình bày ba thuật toán sau: thuật toán nhánh cận, thuật toán xấp xỉ ngoài và thuật toán xấp xỉ trong.

Luận văn gồm mục lục, hai chương, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày các kiến thức cơ bản của giải tích lồi. Đó là tập lồi, tập lồi đa diện và hàm lồi cùng với những tính chất đặc trưng của nó. Tiếp theo giới thiệu bài toán cực đại của hàm lồi trên một tập lồi cùng với điều kiện nghiệm tối ưu (toàn cục), tính chất cực đại hàm lồi và xét một số ví dụ về bài toán cực đại của hàm lồi.

Chương 2: Giới thiệu một số kiến thức cơ bản về hàm bao lồi. Trình bày ba thuật toán cơ bản giải bài toán tìm cực đại hàm lồi trên một tập lồi. Đó là thuật toán nhánh cận, thuật toán xấp xỉ ngoài và thuật toán xấp xỉ trong. Sau mỗi thuật toán sẽ có một ví dụ minh họa cho thuật toán.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn trực tiếp của GS. TSKH. Lê Dũng Mưu. Mặc dù tác giả đã hết sức cố gắng nhưng do vấn đề được nghiên cứu là khá phức tạp và kinh nghiệm nghiên cứu còn hạn chế nên khó tránh khỏi thiếu sót. Trong quá trình viết luận văn cũng như xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những sai sót nhất định. Tác giả mong nhận được sự góp ý của các quý thầy cô và các bạn để luận văn được hoàn thiện hơn.

Chương 1

Bài toán cực đại hàm lồi trên tập lồi đa diện

Trong chương này ta trình bày các khái niệm cơ bản của tập lồi, tập lồi đa diện và hàm lồi cùng với những tính chất đặc trưng của nó. Tiếp theo trình bày điều kiện cần và đủ của nghiệm tối ưu, tính chất cực đại hàm lồi và xét một số ví dụ về bài toán cực đại của hàm lồi. Các kiến thức trình bày trong chương này được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [1], [2], [3], [6], [7].

1.1 Tập lồi đa diện và hàm lồi

1.1.1 Tập lồi đa diện

Định nghĩa 1.1. *Một đường thẳng đi qua hai điểm (hai véc-tơ) a, b trong $\mathbb{R}^n$ là tập hợp tất cả các véc-tơ $x \in \mathbb{R}^n$ có dạng*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha a + \beta b,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha + \beta = 1\}.$$

Định nghĩa 1.2. *Đoạn thẳng nối hai điểm a và b trong $\mathbb{R}^n$ là tập hợp các véc-tơ x có dạng*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = \alpha a + \beta b,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1\}.$$

Định nghĩa 1.3. *Một tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là một tập lồi nếu C chứa mọi đoạn thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó. Tức là C lồi khi và chỉ khi*

$$\forall x, y \in C,\ \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in C.$$

Định nghĩa 1.4. *Điểm* $x \in \mathbb{R}^n$ *có dạng* $x = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_k a^k$ *với* $a^i \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = 1$ *gọi là một tổ hợp lồi của các điểm* a^1, a^2,..., a^k.

Định nghĩa 1.5. *Thứ nguyên (hay số chiều) của một tập lồi* C*, ký hiệu* $dimC$*, là số chiều của bao affine của nó.*

Một tập lồi C trong $\mathbb{R}^n$ gọi là có thứ nguyên đầy nếu $dimC = n$.

Định nghĩa 1.6. *Tập* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *gọi là một tập affine (hay đa tạp tuyến tính) nếu* C *chứa trọn cả đường thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó, tức là*

$$\forall a, b \in C,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (1 - \lambda)a + \lambda b \in C.$$

Nhận xét 1.1. Nếu C là một tập affine và $a \in \mathbb{R}^n$ thì

i) $a + C = \{a + x : x \in C\}$ cũng là một tập affine.

ii) C là một tập affine chứa gốc khi và chỉ khi C là một không gian con, nghĩa là nếu a, b thuộc C thì mọi điểm $\lambda a + \mu b$ cũng thuộc C với λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.7. *Điểm* $x \in \mathbb{R}^n$ *có dạng* $x = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_k a^k$ *với* $a^i \in \mathbb{R}^n$ *và* $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = 1$ *gọi là một tổ hợp affine của các điểm* a^1, a^2,..., a^k.

Định nghĩa 1.8. *Thứ nguyên (hay số chiều) của một tập affine* C*, ký hiệu* $dimC$*, là số chiều của không gian con song song với nó.*

Ta quy ước: $dim\emptyset = -1$.

Định nghĩa 1.9. *Một tập* $C \subset \mathbb{R}^n$ *được gọi là nón nếu*

$$\forall \lambda > 0,\ \forall x \in C \Rightarrow \lambda x \in C.$$

Một nón được gọi là nón lồi nếu nó đồng thời là một tập lồi. Một nón được gọi là nón nhọn nếu nó không chứa đường thẳng. Nếu nón này là một tập lồi đa diện thì ta nói nó là nón lồi đa diện.

Định nghĩa 1.10. *Cho* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *là một tập lồi và* $x \in C$.

(i) *Tập*

$$N_C(x) := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, y - x \rangle \leq 0,\ \forall y \in C\},$$

được gọi là nón pháp tuyến ngoài của C *tại* x *và tập* $-N_C(x)$ *được gọi là nón pháp tuyến trong của* C *tại* x.

(*ii*) *Tập*

$$N_C^{\epsilon}(x) := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle w, y - x\rangle \le \epsilon,\ \forall y \in C\},$$

được gọi là nón pháp tuyến ϵ của C tại x.

Hiển nhiên $0 \in \mathbb{N}_C(x)$ và dùng định nghĩa ta có $\mathbb{N}_C(x)$ là một nón lồi đóng.

Định nghĩa 1.11. *Bao lồi của một tập C là giao của tất cả các tập lồi chứa C. Bao lồi của một tập C được ký hiệu là co$C$.*

Bao lồi đóng của một tập C là tập lồi đóng nhỏ nhất chứa C. Ta ký hiệu bao đóng của một tập C là $\overline{\text{co}}C$.

Bao affine của C là giao của tất cả các tập affine chứa C. Bao affine của một tập C được ký hiệu là aff C.

Định nghĩa 1.12. *Siêu phẳng trong không gian $\mathbb{R}^n$ là một tập hợp các điểm có dạng*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = \alpha\},$$

trong đó $a \in \mathbb{R}^n$ là một véc-tơ khác 0 và $\alpha \in \mathbb{R}$. Véc-tơ a thường được gọi là véc-tơ pháp tuyến của siêu phẳng.

Định nghĩa 1.13. *Nửa không gian đóng là một tập hợp có dạng*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \ge \alpha\},$$

trong đó $a \neq 0$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tập

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle > \alpha\},$$

là nửa không gian mở.

Một siêu phẳng sẽ chia không gian ra làm hai nửa không gian, mỗi nửa không gian ở về một phía của siêu phẳng. Nếu hai nửa không gian này là đóng thì phần chung của chúng chính là siêu phẳng đó.

Định nghĩa 1.14. *Cho hai tập C và D khác rỗng.*

(*i*) *Ta nói siêu phẳng $\langle a, x\rangle = \alpha$ tách C và D nếu*

$$\langle a, x\rangle \le \alpha \le \langle a, y\rangle,\ \forall x \in C,\ \forall y \in D.$$

(ii) Ta nói siêu phẳng $\langle a, x\rangle = \alpha$ tách chặt C và D nếu

$$\langle a, x\rangle < \alpha < \langle a, y\rangle,\ \forall x \in C,\ \forall y \in D.$$

(iii) Ta nói siêu phẳng $\langle a, x\rangle = \alpha$ tách mạnh C và D nếu

$$\sup_{x\in C}\langle a, x\rangle < \alpha < \inf_{y\in D}\langle a, y\rangle.$$

Định lý 1.1. *(Định lý tách 1). Cho C và D là hai tập lồi khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$ sao cho $C \cap D = \emptyset$. Khi đó có một siêu phẳng tách C và D.*

Định lý 1.2. *(Định lý tách 2). Cho C và D là hai tập lồi đóng khác rỗng sao cho $C \cap D = \emptyset$. Giả sử có ít nhất một tập là compact. Khi đó hai tập này có thể tách mạnh được bởi một siêu phẳng.*

Hệ quả 1.1. *(Bổ đề Farkas) Cho $a \in \mathbb{R}^n$ và A là ma trận cấp $m \times n$. Khi đó $\langle a, x\rangle \geq 0$, với mọi x thỏa mãn $Ax \geq 0$, khi và chỉ khi tồn tại $y \geq 0$ thuộc $\mathbb{R}^m$ sao cho $a = A^T y$.*

Ý nghĩa hình học của bổ đề Farkas: Siêu phẳng đi qua gốc tọa độ $\langle a, x\rangle = 0$, để nón $Ax \geq 0$ về một phía của nó khi và chỉ khi véc-tơ pháp tuyến a của siêu phẳng nằm trong nón sinh bởi các hàng của ma trận A.

Định nghĩa 1.15. *Một tập con lồi F của một tập lồi C gọi là một diện của C nếu $x, y \in C$ mà $(1-\lambda)x + \lambda y \in F$, $0 < \lambda < 1$ thì $[x, y] \subset F$, nghĩa là nếu một đoạn thẳng bất kỳ thuộc C có một điểm trong tương đối thuộc F thì cả đoạn thẳng ấy phải nằm trọn trong F.*

Một diện có số chiều 0 gọi là một điểm cực biên của C.

Một diện có số chiều 1 gọi là một cạnh của C.

Nếu một tập lồi C có diện là một nửa đường thẳng thì véc-tơ chỉ phương của nửa đường thẳng này gọi là một phương cực biên của C.

Tính chất 1.1. *Các tính chất sau về diện của các tập lồi*

- *Một diện của một nón lồi là một nón lồi.*
- *Một diện của một diện của C cũng là một diện của C.*
- *Một diện E của một tập lồi đóng C là một tập lồi đóng.*
- *Giao của tập lồi C với một siêu phẳng tựa của C là một diện của C.*

- *Giả sử $F \subset \mathbb{R}^n$ là một tập bất kỳ và $C = convF$. Khi đó, mọi điểm cực biên của C đều thuộc F.*

Định nghĩa 1.16. *Một tập lồi mà là giao của một số hữu hạn nửa không gian đóng gọi là một tập lồi đa diện. Nói cách khác, đó là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các bất phương trình tuyến tính*

$$\langle a^i, x\rangle \leq b_i,\ i = 1, 2, ..., m\ (a^i \in \mathbb{R}^n,\ b_i \in \mathbb{R}), \tag{1.1}$$

nghĩa là tập các x nghiệm đúng $Ax \leq b$ với A là một ma trận cấp $m \times n$ và $b \in \mathbb{R}^m$.

Vì một phương trình tuyến tính có thể biểu diễn tương đương bằng hai bất phương trình tuyến tính nên một tập lồi đa diện cũng là tập nghiệm của một hệ các phương trình và bất phương trình tuyến tính

$$\langle a^i, x\rangle = b_i,\ i = 1, 2, ..., p$$

$$\langle a^i, x\rangle \leq b_i,\ i = p+1, ..., m.$$

Hạng của hệ bất phương trình tuyến tính (1.1) được định nghĩa bằng hạng của ma trận A. Nếu hạng của hệ này bằng m thì ta nói hệ độc lập tuyến tính.

Nhận xét 1.2. *i*) Một tập lồi đa diện có thể không bị chặn (không giới nội).

ii) Một tập lồi đa diện bị chặn còn được gọi là một đa diện lồi.

iii) Mỗi điểm cực biên của một tập lồi đa diện còn được gọi là một đỉnh của nó. Tập các đỉnh của C ký hiệu là $V(C)$. Mỗi cạnh vô hạn của một tập lồi đa diện tương ứng với một phương cực biên của nó.

Cho tập lồi đa diện $D \neq \emptyset$ xác định bởi hệ bất phương trình tuyến tính (1.1). Khi đó mỗi bất phương trình (1.1) gọi là một ràng buộc của D. Ta nói điểm $x^0 \in D$ thỏa mãn chặt ràng buộc i^* nếu $\langle a^{i^*}, x^0\rangle = b_i$. Với mỗi $x \in D$, ký hiệu $I(x) = \{i : \langle a^i, x\rangle = b_i\}$ là tập chỉ số của những ràng buộc thỏa mãn chặt tại x.

Ký hiệu $I_0 = \{i : \langle a^i, x\rangle = b_i,\ \forall x \in D\}$. Tính chất đặc trưng của các diện, các đỉnh và cạnh của D được cho trong định lý sau.