

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
-----✎📖✎-----

LÊ THỊ THU HÀ

**QUY TẮC NHÂN TỬ LAGRANGE
CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTƠ KHẢ VI**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

Thái nguyên – 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
----------

LÊ THỊ THU HÀ

**QUY TẮC NHÂN TỬ LAGRANGE
CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTO KHẢ VI**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60 46 01 12

Giáo viên hướng dẫn: PGS.TS Đỗ Văn Lưu

Thái nguyên – 2014

MỞ ĐẦU

Lý thuyết các điều kiện tối ưu là một bộ phận quan trọng của lý thuyết tối ưu hóa và có nhiều ứng dụng trong kinh tế, kỹ thuật. Cho đến nay lý thuyết các điều kiện tối ưu đã thu được nhiều kết quả phong phú và đẹp đẽ.

Để dẫn các điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu vectơ trước hết ta có thể sử dụng định lý Ljusternik của giải tích hàm để chứng minh các điều kiện cần dạng hệ bất đẳng thức không tương thích. Từ đó sử dụng định lý tách của giải tích lồi ta sẽ dẫn được các điều kiện cần Fritz John và Kuhn - Tucker. Điều kiện cần Kuhn - Tucker ấy sẽ trở thành điều kiện đủ tối ưu khi giả thiết thêm một điều kiện về tính lồi suy rộng của các hàm dữ liệu. Các điều kiện tối ưu là đề tài đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Chính vì vậy tôi đã chọn đề tài "Quy tắc nhân tử Lagrange cho bài toán tối ưu vectơ khả vi"

Luận văn trình bày lý thuyết các điều kiện Fritz John và Kuhn - Tucker và các điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu vectơ khả vi.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, kết luận, và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1: Nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu

Trình bày các khái niệm cực tiểu, cực đại, cực tiểu yếu, cực đại yếu của một tập hợp và nghiệm hữu hiệu (hay cực tiểu), nghiệm hữu hiệu yếu (hay cực tiểu yếu) của bài toán cực tiểu vectơ cùng với một số kết quả bổ trợ để dẫn điều kiện tối ưu.

Chương 2. Điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu yếu.

Trình bày các điều kiện cần dạng hệ bất đẳng thức không tương thích,

điều kiện cần Fritz John và điều kiện cần Kuhn - Tucker cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán tối ưu vectơ .

Chương 3. Điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu và nghiệm hữu hiệu yếu.

Trình bày các tính chất của hàm tựa lồi và các điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán tối ưu vectơ với giả thiết về tính lồi suy rộng của các hàm mục tiêu và ràng buộc.

Nhân dịp này em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS Đỗ Văn Lưu, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ em hoàn thành bản luận văn này.

Em xin chân thành cảm ơn Phòng đào tạo sau đại học, Ban Giám Hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cùng các thầy cô giáo đã tham gia giảng dạy khóa học.

Tôi xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học toán K6D đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2014

Tác giả

Lê Thị Thu Hà

Chương 1

NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU

Chương 1 trình bày các khái niệm cực tiểu, cực đại, cực tiểu yếu, cực đại yếu của một tập trong không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận và các khái niệm nghiệm hữu hiệu (hay cực tiểu), nghiệm hữu hiệu yếu (hay cực tiểu yếu) của bài toán cực tiểu vectơ cùng với một số kết quả bổ trợ để dẫn điều kiện tối ưu. Các kết quả trình bày trong chương này được tham khảo trong [2].

1.1. Nghiệm hữu hiệu và nghiệm hữu hiệu yếu của một tập và bài toán tối ưu đa mục tiêu

Trong phần này ta sẽ dẫn quy tắc nhân tử Lagrange cho bài toán tối ưu đa mục tiêu với các hàm khả vi Fréchet. Ta đưa vào các giả thiết sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Giả sử } (X, \|\cdot\|_X) \text{ và } (Z_2, \|\cdot\|_{Z_2}) \text{ là các không gian Banach thực;} \\ (Y, \|\cdot\|_Y) \text{ và } (Z_1, \|\cdot\|_{Z_1}) \text{ là các không gian định chuẩn có thứ tự} \\ \text{bộ phận trong } Y. \text{ Giả sử } C_Y \text{ và } C_{Z_1} \text{ là các nón thứ tự bộ phận} \\ \text{trong } Y \text{ và trong } Z_1 \text{ có phần trong khác rỗng;} \\ \hat{S} \text{ là tập con lồi khác rỗng của } X \text{ có phần trong khác rỗng;} \\ \text{Giả sử } f : X \rightarrow Y; g : X \rightarrow Z \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Xét tập ràng buộc sau đây:

$$S := \{ x \in \hat{S} \mid g(x) \in -C_{Z_1} \text{ và } h(x) = 0_{z_2} \}$$

Giả sử tập S khác rỗng. Ta xét bài toán tối ưu trừu tượng sau:

$$\min_{x \in S} f(x) \quad (1.2)$$

Ánh xạ f được gọi là ánh xạ mục tiêu. Trước hết ta định nghĩa nghiệm của bài toán (1.2). Ta nhắc lại các khái niệm cực tiểu, cực đại, cực tiểu yếu và cực đại yếu của một tập.

Định nghĩa 1.1.1

Giả sử S là tập con khác rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự C .

(i) Phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là cực tiểu (minimal element) của tập S nếu:

$$(\{\bar{x}\} - C) \cap S \subset \{\bar{x}\} + C \quad (1.3)$$

(ii) Phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là cực đại (maximal element) của tập S nếu:

$$(\{\bar{x}\} + C) \cap S \subset \{\bar{x}\} - C \quad (1.4)$$

Nếu nón thứ tự C nhọn thì các bao hàm thức (1.3) và (1.4) có thể thay bằng các đẳng thức sau:

$$(\{\bar{x}\} - C) \cap S = \{\bar{x}\} \quad (\text{hoặc } x \leq_C \bar{x}, x \in S \Rightarrow x = \bar{x}),$$

và

$$(\{\bar{x}\} + C) \cap S = \{\bar{x}\} \quad (\text{hoặc } \bar{x} \leq_C x, x \in S \Rightarrow x = \bar{x}).$$

Nhắc lại: Phần trong đại số của của $S \neq \emptyset$ trong không gian tuyến tính thực X là tập

$$\text{cor}(S) = \{\bar{x} \in S \mid \forall x \in X, \exists \bar{\lambda} > 0 : \bar{x} + \lambda x \in S, \forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}]\}$$

Định nghĩa 1.1.2

Giả sử S là tập con khác rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X với nón thứ tự C có phần trong đại số khác rỗng:

(i) Phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là cực tiểu yếu (weakly minimal element) của tập S nếu:

$$(\{\bar{x}\} - \text{cor}(C)) \cap S = \emptyset;$$

(ii) Phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là cực đại yếu (weakly maximal element) của tập S nếu:

$$(\{\bar{x}\} + \text{cor}(C)) \cap S = \emptyset.$$

Chú ý rằng các khái niệm cực tiểu và cực tiểu yếu liên quan chặt chẽ với nhau. Lấy một phần tử $\bar{x} \in S$ là cực tiểu yếu của tập S tức là ta có: $(\{\bar{x}\} - \text{cor}(C)) \cap S = \emptyset$. Khi đó, $\bar{X}$ cũng là cực tiểu yếu của tập S đối với thứ tự bộ phận sinh ra bởi $\hat{C} = \text{cor}(C) \cup \{0_X\}$.

Bổ đề 1.1.1[2]

Giả sử S là tập con khác rỗng của không gian tuyến tính có bộ phận X với nón thứ tự C có phần trong đại số khác rỗng.

(i) *Mọi cực tiểu yếu $\bar{x} \in S$ của tập $S + C$ cũng là cực tiểu yếu của tập S .*

(ii) *Mọi cực tiểu yếu $\bar{x} \in S$ của tập S cũng là cực tiểu yếu của tập $S + C$.*

Mệnh đề 1.1.2

Giả sử S là tập con khác rỗng của không gian tuyến tính có thứ tự bộ phận X . Với nón thứ tự C mà $C \neq X$ và $\text{cor}(C) \neq \emptyset$. Khi đó, mọi phần tử cực tiểu của tập S cũng là cực tiểu yếu của S .

Chứng minh

Giả thiết $C \neq X$ kéo theo $(-\text{cor}(C)) \cap C = \emptyset$. Do đó, với một phần tử cực tiểu $\bar{x}$ của S , ta có

$$\begin{aligned} \emptyset &= (\{\bar{x}\} - \text{cor}(C)) \cap (\{\bar{x}\} + C) \\ &= (\{\bar{x}\} - \text{cor}(C)) \cap (\{\bar{x}\} - C) \cap S \\ &= (\{\bar{x}\} - \text{cor}(C)) \cap S. \end{aligned}$$

Điều đó có nghĩa là $\bar{x}$ cũng là cực tiểu của S . □

Bây giờ ta định nghĩa khái niệm nghiệm hữu hiệu và nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán tối ưu (1.2)

Định nghĩa 1.1.3

Giả sử bài toán tối ưu (1.2) thỏa mãn các giả thiết (1.1).

(i) Một phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là cực tiểu (nghiệm hữu hiệu) của bài toán (1.2) nếu $f(\bar{x})$ là cực tiểu của tập ảnh $f(S)$.

(ii) Một phần tử $\bar{x} \in S$ được gọi là cực tiểu (nghiệm hữu hiệu yếu) của bài toán (1.2) nếu $f(\bar{x})$ là cực tiểu yếu của tập ảnh $f(S)$.

1.2. Một số kết quả bổ trợ để dẫn điều kiện tối ưu

Để nhận được điều kiện cần cho cực tiểu yếu (nghiệm hữu hiệu yếu) của bài toán tối ưu (1.2) ta cần một kết quả về nón tiếp liên.

Cho S là tập con của không gian định chuẩn X , nón tiếp liên của tập S tại điểm $\bar{x} \in S$ được định nghĩa như sau:

$$T(S; \bar{x}) = \{v \in X : \exists v_n \longrightarrow v, \exists t_n \longrightarrow 0^+ \text{ sao cho} \\ \bar{x} + t_n v_n \in S, \forall n\}.$$

Để dẫn điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (1.2) ta trình bày mệnh đề sau về nón tiếp liên.

Mệnh đề 1.2.1

Giả sử $(X, \|\cdot\|_X)$ là không gian định chuẩn thực và $(Y, \|\cdot\|_Y)$ là không gian định chuẩn có thứ tự bộ phận với nón thứ tự C_Y có phần trong khác rỗng. Hơn nữa, giả sử S là tập con khác rỗng của X và ánh xạ $r : X \rightarrow Y$. Nếu ánh xạ r là khả vi Fréchet tại $\bar{x} \in S$ nào đó, với $r(\bar{x}) \in -C_Y$ thì

$$\{h \in T(S, \bar{x}) \mid r(\bar{x}) + r'(\bar{x})(h) \in -\text{int}(C_Y)\} \\ \subset T(\{x \in S \mid r(x) \in -\text{int}(C_Y)\}, \bar{x}),$$

trong đó $T(., .)$ ký hiệu nón tiếp liên.

Chứng minh:

Chọn phần tử $h \in T(S; \bar{x})$, với tính chất $r(\bar{x}) + r'(\bar{x})(h) \in -\text{int}(C_Y)$. Với $h = 0_X$, khẳng định là tầm thường. Do đó, ta giả sử $h \neq 0_X$. Khi đó,

tồn tại dãy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ các phần tử $x_n \in S$ và dãy $(\lambda_n)_n \in \mathbb{N}$ gồm các số thực dương λ_n sao cho

$$\bar{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x_n$$

và

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(x_n - \bar{x}).$$

Nếu ta đặt

$$h_n := \lambda_n(x_n - \bar{x}), \forall n \in \mathbb{N},$$

thì ta nhận được

$$\begin{aligned} r(x_n) &= \frac{1}{\lambda_n} [\lambda_n(r(x_n) - r(\bar{x}) - r'(\bar{x})(x_n - \bar{x})) + r'(\bar{x})(h_n - h) \\ &\quad + r(\bar{x}) + r'(\bar{x})(h)] + (1 - \frac{1}{\lambda_n})r(\bar{x}), \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(r(x_n) - r(\bar{x}) - r'(\bar{x})(x_n - \bar{x})) + r'(\bar{x})(h_n - h) = 0_Y. \quad (1.6)$$

Theo giả thiết ta có

$$r(\bar{x}) + r'(\bar{x})(h) \in -\text{int}(C_Y),$$

và do đó từ (1.6) ta suy ra

$$\begin{aligned} y_n &:= \lambda_n(r(x_n) - r(\bar{x}) - r'(\bar{x})(x_n - \bar{x})) \\ &\quad + r'(\bar{x})(h_n - h) + r(\bar{x}) + r'(\bar{x})(h) \\ &\in -\text{int}(C_Y) \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ đủ lớn,} \end{aligned}$$

và

$$\frac{1}{\lambda_n} y_n \in -\text{int}(C_Y) \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ đủ lớn.}$$

Bởi vì

$$\left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right) r(\bar{x}) \in -C_Y \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ đủ lớn,}$$

Từ (1.5) ta suy ra

$$\begin{aligned} r(x_n) &= \frac{1}{\lambda_n} y_n + \left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right) r(\bar{x}) \\ &\in -\text{int}(C_Y) - C_Y \\ &= -\text{int}(C_Y) \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ đủ lớn,} \end{aligned}$$

bởi vì với $\text{int}(C_Y) \neq \emptyset$ thì $\text{int}(C_Y) = \text{cor}(C_Y)$.

Nhưng điều này lại dẫn tới:

$$h \in T(\{x \in S \mid r(x) \in -\text{int}(C_Y)\}, \bar{x}).$$

□

Mệnh đề 1.2.2[2]

Giả sử C_X là nón lồi trong không gian tuyến tính thực X .

(a) Nếu X là không gian lồi địa phương và C_X đóng thì

$$C_X = \{x \in X \mid x^*(x) \geq 0 \quad \forall x^* \in C_{X^*}\}.$$

(b) Nếu $\text{cor}(C_X) \neq \emptyset$ thì

$$\text{cor}(C_X) = \{x \in X \mid x'(x) > 0 \quad \forall x' \in C_{X'} \setminus \{0_{X'}\}\}$$

(c) Nếu X là không gian tôpô tuyến tính thực và $\text{int}(C_X) \neq \emptyset$ thì

$$\text{int}(C_X) = \{x \in X \mid x^*(x) > 0 \quad \forall x^* \in C_{X^*} \setminus \{0_{X^*}\}\},$$

trong đó X^ là không gian ngẫu tôpô của X , X' là không gian ngẫu đại số của X .*