ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM XUÂN ĐẠO

TOÁN TRÒ CHƠI : PHÂN LOẠI, CÔNG CỤ VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

CHUYÊN NGÀNH: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

2013

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Trò chơi đã gắn kết với cuộc sống và hoạt động của con người từ thời cổ đại. Tuy nhiên *Lý thuyết Trò chơi* như một ngành khoa học có lẽ chỉ mới được hình thành và nghiên cứu khoảng vài ba trăm năm trở lại đây. Nhiều trò chơi trong cuộc sống (gieo xúc xắc, chơi bài, đôminô, trò chơi đối kháng và hợp tác,…) đã khơi nguồn sáng tạo cho nhiều nhà toán học, để từ đó nhiều ngành toán học mới (xác suất, lý thuyết đồ thị, lý thuyết trò chơi và ứng dụng trong kinh tế,…) ra đời.

Mục đích của Luận văn là sơ lược phân loại các dạng toán trò chơi và phân tích một số phương pháp, công cụ giải toán trò chơi trong Toán phổ thông. Trong khuôn khổ một luận văn chuyên ngành *Toán sơ cấp*, chúng tôi giới hạn lĩnh vực trình bày nội dung lí thuyết, các ví dụ và bài tập về trò chơi gần với và có thể áp dụng được trong giảng dạy toán ở trường phổ thông.

Toán trò chơi liên quan mật thiết với nhiều dạng toán khác (toán tập hợp, toán tổ hợp, đồ thị, lôgic toán, giải trí toán học và đố vui,…). Nhiều bài toán có thể phát biểu lại dưới ngôn ngữ trò chơi. Ngược lại, một số bài toán trò chơi cũng có thể được phát biểu dưới dạng khác.

Luận văn cố gắng trình bày một cách có hệ thống những nội dung cơ bản nhất về Toán trò chơi. Các công cụ và phương pháp giải toán được trình bày ở đây là: Phương pháp đại lượng bất biến hoặc đơn biến, nguyên lý cực hạn, lý thuyết đồ thị và công cụ hệ đếm cơ số 2,... Việc phân loại Toán trò chơi cũng như trình bày các công cụ và phương pháp giải toán trò chơi dựa vào nội dung bài giảng [5] của Thầy hướng dẫn. Chúng tôi cố gắng bổ sung thêm một số công cụ và phương pháp giải so với [5].

Một công cụ, một phương pháp có thể sử dụng để giải nhiều bài toán. Ngược lại, một bài toán có thể được giải bằng các công cụ và phương pháp khác nhau.

Vì vậy, việc phân loại các dạng toán trò chơi cũng như phương pháp giải chúng chỉ mang tính ước lệ, nhằm phần nào hệ thống hóa và phân loại các bài toán trò chơi, giúp học sinh dễ hiểu, dễ học hơn. Chúng tôi cũng đã cố gắng sưu tầm nhiều bài tập toán trò chơi trong các kì thi Olympic toán Quốc gia và Quốc tế, với hi vọng luận văn có thể được sử dụng như một tài liệu tham khảo tốt trong giảng dạy toán ở trường phổ thông.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, luận văn gồm ba chương.

Chương 1 *Trò chơi một người*

Chương 2 *Trò chơi nhiều người và Trò chơi với hệ động lực*

Chương 3 *Các bài toán thi Olympic toán trò chơi*

Luận văn được hoàn thành tại Khoa Toán - Tin, Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Tạ Duy Phượng. Nhân dịp này, tôi xin cảm ơn tới PGS.TS.Tạ Duy Phượng, người đã hướng dẫn giúp đỡ tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn đến Khoa Toán - Tin, Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã trang bị cho tôi những kiến thức toán trong chương trình Cao học.

Xin được cảm ơn Trường Trung học Cơ sở An Dương, Hải Phòng, nơi tôi công tác, đã tạo mọi điều kiện để tôi hoàn thành nhiệm vụ học tập.

Xin được cảm ơn gia đình, bạn bè đã động viên, giúp đỡ, hi sinh và tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học Cao học và viết Luận văn.

Hải Phòng, ngày 01.5.2013

Phạm Xuân Đạo

Chương 1 Trò chơi một người

Trong luận văn này, *trò chơi* được hiểu gồm một tập hợp các *trạng thái* (cấu hình, vị trí,…) chịu tác động của một hay nhiều đối tượng (*người chơi*). Người chơi với các khả năng và hạn chế của mình phải tìm ra các *chiến lược*, *chiến thuật* (cách đi, bước đi) tuân theo những *qui tắc* chơi đã được định sẵn để đưa một *trạng thái ban đầu* về *trạng thái cuối* (kết thúc trò chơi), với thời gian (số bước đi) ít nhất và đỡ tốn kém (năng lượng, chi phí,...) nhất. *Toán trò chơi* được hiểu là dạng toán mà ta có thể sử dụng các công cụ và phương pháp toán học để phân tích cấu trúc, trạng thái và qui tắc của trò chơi nhằm hoạch định chiến lược kết thúc trò chơi hoặc chỉ ra trò chơi có thể tiếp diễn vô tận hay không tồn tại chiến lược kết thúc trò chơi.

Trò chơi một người là trò chơi chỉ cần một người chơi (thí dụ, trò chơi Tháp Hà Nội, trò chơi Hamilton, bài toán con mã đi tuần, trò chơi tháo vòng Trung Hoa, trò chơi khối vuông rubic,…). Các trò chơi này nhiều khi còn được đưa vào lớp các bài toán giải trí toán học, các bài toán lôgic,...

1.1 Phương pháp đại lượng bất biến hoặc đơn biến

Bất biến có mặt trong hầu hết các lĩnh vực của Toán học. Bất biến là một khái niệm thường gặp trong toán phổ thông. Thí dụ, bất biến là *tính chẵn lẻ, tính chia hết cho 3*, *tính đối xứng, sự bảo toàn góc*,… tức là những điều thường gặp trong toán phổ thông và khá dễ hiểu. Tuy nhiên, bất biến cũng vẫn còn là khái niệm mới đối với học sinh phổ thông. Bởi vậy, việc trang bị khái niệm và hướng dẫn học sinh sử dụng bất biến trong giải toán, theo chúng tôi, là việc làm có ý nghĩa và cần thiết giúp phát triển tư duy toán học, nhìn thấy cái tĩnh trong cái động, mở rộng kiến thức và kĩ thuật giải toán cho học sinh.

Bất biến là những đại lượng (hay tính chất) không thay đổi trong quá trình chúng ta thực hiện các phép biến đổi. Đại lượng bất biến nhiều khi còn phụ thuộc vào nội dung của bài toán cụ thể. Thí dụ, khoảng cách giữa hai điểm là một đại lượng bất biến trong phép tịnh tiến, nhưng là đại lượng thay đổi trong phép vị tự; tỷ lệ giữa độ dài hai đoạn thẳng vừa là đại lượng bất biến trong phép tịnh tiến, vừa là một đại lượng bất biến trong phép vị tự.

Giả sử trò chơi ở một *trạng thái ban đầu*. Do tính bất biến, nên *không thể thay đổi trạng thái* (từ chẵn thành lẻ, từ trắng thành đen,…) được. Từ đó ta có kết luận về *trạng thái cuối cùng* của trò chơi.

Đơn biến là một đại lượng luôn thay đổi, nhưng chỉ theo một chiều tức là tăng lên hay giảm xuống (đơn điệu).

Bất biến và đơn biến được sử dụng để giải quyết nhiều bài toán, dạng toán khác nhau (*Dĩ bất biến ứng vạn biến!*).

Trong mục này, chúng ta sẽ tìm hiểu về bất biến, đơn biến và ứng dụng của chúng trong việc giải các bài toán trò chơi toán học, chủ yếu là qua các ví dụ.

Có hai mẫu bài toán thường được giải quyết bằng bất biến và đơn biến.

Bài toán 1 Có một tập hợp các trạng thái Ω và tập hợp các phép biến đổi T từ Ω vào Ω. Có hai trạng thái α và β thuộc Ω. Hỏi có thể dùng hữu hạn các phép biến đổi thuộc T để đưa trạng thái α về trạng thái β được không?

Bài toán 2 Có một tập hợp các trạng thái Ω và tập hợp các phép biến đổi T từ Ω vào Ω. Cần chứng minh rằng, bắt đầu từ một trạng thái α bất kỳ, sau một số hữu hạn các phép biến đổi T, ta sẽ đi đến trạng thái kết thúc β (trong nhiều trường hợp, đó là trạng thái *ổn định*, *bất động*, tức là sẽ không tiếp tục thay đổi khi tiếp tục tác động các phép biến đổi từ T). Tương tự, trong một số bài toán, ta phải chứng minh không tồn tại dãy biến đổi (liên tiếp) từ T để thực hiện được mục đích chuyển trạng thái α sang trạng thái β.

Bất biến hoặc đơn biến nhiều khi ẩn tàng, khó nhận biết. Vì vậy sử dụng bất biến hoặc đơn biến trong giải toán thực chất là quá trình phân tích và phát hiện qui luật bất biến hoặc đơn biến.

1.1.1 Sử dụng bất biến trong giải toán trò chơi

Bài 1.1 Một bảng vuông 4×4 ô. Tại mỗi ô của bảng vuông (Hình 1.1) có chứa dấu "+" hoặc dấu "–". Mỗi một lần thực hiện, bắt buộc phải đổi dấu của tất cả các ô trên cùng một hàng hoặc cùng một cột. Giả sử bảng ô vuông ban đầu có 1 dấu "+" và 15 dấu "–". Hỏi có thể đưa bảng ban đầu về bảng có toàn dấu cộng được không?

Giải Thay dấu cộng bằng số 1 và dấu trừ bằng -1. Xét tích tất cả các số trên bảng vuông. Qua mỗi phép biến đổi, tích này không thay đổi (vì mỗi phép biến đổi sẽ đổi dấu tất cả bốn số của một hàng hoặc một cột), nghĩa là nếu hàng (cột) đó đang có số chẵn (lẻ) dấu trừ thì sau một lần đổi dấu ta lại có số chẵn (lẻ) dấu trừ, do đó tích trong hàng mới (cột mới) là không đổi.

+	–	+	+
–	+	+	+
+	+	–	+
+	+	+	–

Hình 1.1

Thí dụ, hàng (cột) đang có 0, 2, 4 dấu trừ, thì sau đó sẽ có 4, 2, 0 dấu trừ (số dấu trừ là chẵn), nếu hàng (cột) đang có 1 (hoặc 3) dấu trừ thì sau đó sẽ có 3 (hoặc 1) dấu trừ. Vì vậy, cho dù ta thực hiện bao nhiêu lần, *tính chẵn lẻ của số dấu trừ trong một hàng* (một cột) *là một đại lượng không thay đổi* (bất biến). Kéo theo *tích tất cả các số trong hình vuông luôn không đổi* (luôn bằng 1 hoặc bằng -1 phụ thuộc vào số dấu trừ ban đầu là chẵn hay lẻ). Do đó từ bảng vuông có trạng thái $(1,\ 15)$ gồm 1 dấu cộng và 15 (số lẻ) dấu trừ, ta chỉ có thể đưa về các bảng vuông có số lẻ dấu "–" và số lẻ dấu "+", có nghĩa là không thể đưa về bảng trạng thái $(16,\ 0)$ gồm toàn dấu "+" được.

Bài 1.2 Trên bàn cờ 8×8 có 32 quân trắng và 32 quân đen, mỗi quân chiếm một ô vuông. Tại mỗi bước đi người chơi thay tất cả các quân trắng thành quân đen và tất cả các quân đen thành quân trắng trên một hàng hoặc một cột nào đó. Hỏi sau hữu hạn bước, có thể còn lại chính xác một quân đen trên bàn cờ không?

Giải Nếu trước khi chuyển có chính xác k quân đen trên hàng (cột) định chuyển thì số quân trắng trên hàng (cột) ấy là $8-k$. Sau khi chuyển, $8-k$ quân trắng này trở thành $8-k$ quân đen và k quân đen lại trở thành k quân trắng. Như vậy, số quân đen trên bàn cờ sau khi chuyển sẽ thêm vào $8-k$ và mất đi k quân, tức là số quân đen thay đổi trên bàn cờ là $(8-k)-k=8-2k$. Số này là số chẵn dương (thêm vào) nếu $k<4$ và là số chẵn âm (bớt đi) khi $k>4$ và không thay đổi nếu $k=4$. Vì $8-2k$ là chẵn và lúc đầu có 32 quân đen nên *số quân đen trên bàn cờ luôn luôn là chẵn* (bất biến!).

Vậy với qui tắc chơi trong bài ra không thể từ trạng thái 32 (số chẵn) quân đen trên bàn cờ đưa đến trạng thái còn lại một (số lẻ) quân đen trên bàn cờ được.

Bài 1.3 (Chọn đội tuyển Hồng Kông tham gia IMO, 2000, vòng 1) Có 1999 tách uống trà đặt trên bàn. Lúc đầu tất cả đều được đặt ngửa. Mỗi một nước đi, ta làm cho đúng 100 tách trong số chúng lật ngược lại. Sau một số nước đi, có thể làm cho tất cả chúng đều úp xuống được không? Tại sao? Trả lời câu hỏi này trong trường hợp chỉ có 1998 tách.

Giải Nếu có 1999 chiếc tách (số tách là số lẻ), tất cả đều được đặt ngửa (*trạng thái ngửa*) thì ta không thể quay úp xuống tất cả (*trạng thái úp*) được. Thật vậy, theo qui tắc chơi, tại mỗi thời điểm, giả sử có k tách đặt ngửa được làm úp xuống thì $100-k$ tách đang úp được lật ngửa lên. Khi ấy số các tách úp đã tăng lên k chiếc và giảm đi $100-k$, vậy số tách úp bị thay đổi đi một số chẵn là $\left(100-k\right)-k=100-2k$ (nếu $k>50$ thì số tách úp giảm đi, nếu $k<50$ thì số tách úp tăng lên, $k=50$ thì số tách úp không thay đổi). Nghĩa là *tính chẵn lẻ của số các tách úp không thay đổi* (bất biến!). Nhưng lúc đầu số tách úp ở trạng thái chẵn (bằng 0). Vì vậy không thể làm cho số tách úp bằng 1999 (trở về trạng thái lẻ) được.

Nếu số tách là 1998 thì có thể úp tất cả các tách. Một thuật toán như sau: Đánh số các tách theo thứ tự $1, 2,\ldots, 1998$. Lần lượt úp 100 tách đầu tiên, sau 18 lần úp được 1800 tách chuyển trạng thái từ ngửa sang úp. Tiếp theo úp 100 tách số $1801, 1803, 1804,\ldots, 1901$ (để nguyên tách số 1802 đang ngửa). Lần thứ hai, đảo ngược các tách $1802, 1803, 1804,\ldots,1901$ (giữ nguyên tách số 1801 đang úp). Sau hai lần này, thực chất chỉ có tách số 1 và số 2 bị úp, các tách khác không thay đổi (vẫn đặt ngửa sau khi lật úp rồi lại lật ngửa). Tiếp tục như vậy, sau $18+198=216$ lần, tất cả các tách đều bị lật úp.

Bài 1.4 Một học sinh viết lên bảng $a+b$ số gồm a số 0 và b số 1 và thực hiện phép biến đổi sau: xóa hai số bất kì trên bảng. Nếu chúng bằng nhau thì viết số 0 lên bảng, nếu chúng khác nhau thì viết số 1. Hỏi khi nào số còn lại trên bảng là số 1 và khi nào số còn lại trên bảng là số 0?

Giải Sau một lần thực hiện biến đổi, *tính chẵn lẻ của tổng các số trên bảng là không đổi* (bất biến!). Thật vậy, nếu hai số bị xóa cùng bằng 0 (hoặc một số là 0 và một số là 1) thì số được viết là 0 (hoặc 1), do đó tổng các số trên bảng vẫn giữ nguyên, còn nếu hai số bị xóa cùng là số 1 thì hai số đó bị thay bởi số 0, do đó tổng giảm xuống 2 đơn vị. Như vậy, số cuối cùng trên bảng sẽ là 1 nếu b lẻ và bằng 0 nếu b chẵn.

Nhận xét Nhiều bài toán phát biểu có thể khá gần hoặc rất khác nhau, nhưng thực chất lời giải chỉ là một. Điều quan trọng là ta phải tìm ra tính bất biến trong các bài toán đó.

Qui luật bất biến nhiều khi ẩn sâu trong bài toán đến mức khó nhận ra. Ví dụ thú vị dưới đây minh họa điều đó.

Bài 1.5 (Thi Olympic 30.4 lần thứ 8, 2007, lớp 10, Trường Trung học Phổ thông Chuyên Lê Hồng Phong Thành phố Hồ Chí Minh đề nghị) Với một tam thức bậc hai, cho phép thực hiện một trong hai phép toán sau:

1) Hoán vị hệ số của x^2 và số hạng tự do.

2) Thay x bằng $x-m$ với m là số thực tùy ý.

Hỏi có thể nhận được tam thức bậc hai $30x^2-4x-1975$ từ tam thức $x^2-5x-2007$ qua một số bước thực hiện hai phép toán ở trên hay không?

Giải Tam thức bậc hai có dạng $P(x)=ax^2+bx+c$ ($ac\neq 0$).

Sau khi thực hiện phép toán thứ nhất, tam thức $P(x)=ax^2+bx+c$ trở thành $f(x)=cx^2+bx+a.$ Biệt thức $\Delta_f=b^2-4ac=\Delta_P.$

Sau khi thực hiện phép toán thứ hai, tam thức trở thành

$$g(x)=P(x-m)=a(x-m)^2+b(x-m)+c=ax^2+(b-2ma)x+am^2-bm+c$$

với $\Delta_g=(b-2am)^2-4a(am^2-bm+c)=b^2-4ac=\Delta_P.$

Như vậy, sau cả hai phép biến đổi, $\Delta_P=b^2-4ac$ là một *đại lượng bất biến*.

Suy ra, nếu có một qui trình thực hiện liên tiếp hai phép toán đã cho, để có thể nhận được tam thức $Q(x):=30x^2-4x-1975$ từ tam thức $R(x):=x^2-5x-2007$ thì $\Delta_Q=\Delta_R.$

Nhưng ta có $\Delta_Q=5^2-4.(-2007)=8053,$ còn $\Delta_R=4^2-4.30(-1975)=237016.$