ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI QUỐC ĐỘ

MỘT PHƯƠNG PHÁP XẤP XỈ TRONG GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH PHÂN TUYẾN TÍNH

Chuyên ngành : **TOÁN ỨNG DỤNG**

Mã số : 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

TS . NGUYỄN ANH TUẤN

Thái Nguyên – 2014

Mục lục

Mở đầu

Bài toán quy hoạch phân tuyến tính là một bài toán có ý nghĩa trong kinh tế. Rất nhiều bài toán thực tế trong công nghệ hóa chất, trong lý thuyết trò chơi, mạng vận tải, bài toán cắt nguyên vật liệu, định giá thành sản phẩm, ...đều đưa về bài toán quy hoạch phân tuyến tính.

Như chúng ta đã biết, hàm mục tiêu của bài toán quy hoạch phân tuyến tính là một hàm đơn điệu theo đoạn thẳng, nửa đường thẳng và cả đường thẳng nằm trên miền xác định của nó. Vì vậy ta có thể xây dựng thuật toán kiểu đơn hình giải bài toán quy hoạch phân tuyến tính.

Trong cuốn sách "Các phương pháp tối ưu hóa"([6]) đã đưa ra một thuật toán kiểu đơn hình giải bài toán quy hoạch phân tuyến tính với miền ràng buộc là hệ phương trình tuyến tính. Luận văn này xây dựng một thuật toán xấp xỉ trong giải bài toán quy hoạch phân tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính. Thuật toán này được xây dựng dựa trên khái niệm nón xoay trình bày trong sách "quy hoạch tuyến tính với phương pháp nón xoay" ([1]), nó gần giống với thuật toán nón xoay tuyến tính (thuộc lược đồ xấp xỉ ngoài) giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn đã đề nghị, chỉ khác là các đỉnh của nón xoay dịch chuyển trong thuật toán này nằm trong miền ràng buộc (thuộc lược đồ xấp xỉ trong).

Cơ sở lý luận để xây dựng thuật toán là dựa trên tính gần lồi-gần lõm của hàm mục tiêu bài toán quy hoạch phân tuyến tính. Vì vậy trong hai chương đầu của luận văn sẽ đề cập đến các khái niệm cơ bản và các tính chất của hàm gần lồi-gần lõm và thuật toán nón xoay tuyến tính giải bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn. Nội dung chính của luận văn là đề nghị thuật toán giải bài toán quy hoạch phân tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính.

Luận văn gồm 3 chương:

Chương 1 trình bày bài toán quy hoạch tổng quát, các khái niệm cơ bản về tập lồi, một số mô hình bài toán thực tế đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn và quy hoạch phân tuyến tính cùng với một số khái niệm và tính chất của hàm gần lồi-gần lõm mà các hàm tuyến tính và phân tuyến tính đều thuộc lớp hàm đặc biệt này.

Chương 2 trình bày thuật toán nón xoay tuyến tính[1] giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn khi biết một nón-min của hàm mục tiêu bài toán và thuật toán kiểu đơn hình giải bài toán quy hoạch phân tuyến tính với miền ràng buộc là hệ phương trình tuyến tính[6].

Chương 3 dựa trên khái niệm nón xoay xây dựng thuật toán xấp xỉ trong giải trực tiếp bài toán quy hoạch phân tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính và các ví dụ bằng số minh hoạ cho thuật toán. Trong trường hợp đặc biệt mẫu số của hàm mục tiêu bài toán đồng nhất bằng một thì hàm mục tiêu bài toán trở thành hàm tuyến tính và thuật toán đề nghị trở thành một thuật toán giải trực tiếp bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tổng quát.

Thuật toán nón xoay này thuộc lược đồ xấp xỉ trong giải bài toán quy hoạch phân tuyến tính khi biết một điểm chấp nhận được của miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính. Nó được xây dựng chi tiết, các bước của thuật toán được trình bày sao cho chúng ta có thể dễ dàng lập trình chuyển sang các chương trình trên máy tính bằng các ngôn ngữ như Pascal, C, Java, ...

Luận văn này hoàn thành dựa trên các cuốn sách "Quy hoạch gần lồi - gần lõm ứng dụng vào quy hoạch tuyến tính" [2] và cuốn "Quy hoạch tuyến tính với phương pháp nón xoay" [1] và trên các sách, tài liệu có trong phần tài liệu tham khảo.

Tác giả

Bùi Quốc Độ

CHƯƠNG 1

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

VÀ BÀI TOÁN QUY HOẠCH PHÂN TUYẾN TÍNH

1.1Bài toán tối ưu tổng quát

Bài toán tối ưu tổng quát được phát biểu như sau .

Cực đại hoá (cực tiểu hoá) hàm : $f(x) \to \max\ (\min)$ (1.1)

với các điều kiện $g_i(x)\ (\leq,=,\geq)\ b_i, i=1,...,m$ (1.2)

$$x \in X \subset \mathbb{R}^n \tag{1.3}$$

Bài toán (1.1) – (1.3) được gọi là một quy hoạch, hàm *f(x)* được gọi là hàm mục tiêu, các hàm $g_i(x), i=1,...,m$ được gọi là các hàm ràng buộc, mỗi đẳng thức trong hệ (1.2) được gọi là một ràng buộc.

Tập hợp :

$$D = \{x \in X / g_i(x)\ (\leq,=,\geq)\ b_i, i=1,...,m\} \tag{1.4}$$

Được gọi là miền ràng buộc (hay miền chấp nhận được) . Mỗi điểm :

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D$ được gọi là một phương án (hay một lời giải chấp nhận được). Một phương án $x^* \in D$ đạt cực đại (hay cực tiểu) của hàm mục tiêu, cụ thể là:

$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in D$ (đối với bài toán Max)

$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D$ (đối với bài toán Min)

Được gọi là phương án tối ưu (lời giải tối ưu). Khi đó giá trị $f(x^*)$ được gọi là giá trị tối ưu của bài toán .

1.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn

Bài toán qui hoạch tuyến tính sau đây gọi là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn tổng quát:

$$(L)\begin{cases} f(x) = \langle C, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i . x_i \to \min \\ x \in P_L := \ \ x \in R^n : \langle A^i, x \rangle + b_i \le 0, i = 1, 2, ..., m \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, A^i là véc tơ dòng và $A^i \in \mathbb{R}^n$, $m \ge n$, A^i $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \neq O(0,...,0)$,

$C(c_1, c_2, ..., c_n)$, $b_i \in \mathbb{R}^1$, $i=1, 2, ..., m$. Hạng của hệ A^i ($i=1, 2, ..., m$) bằng n, giả thiết này rất bình thường bởi miền ràng buộc P_L của bài toán quy hoạch tuyến tính bao giờ cũng có ràng buộc về dấu của biến x.

Rõ ràng bài toán quy hoạch tuyến tính bất kỳ đều dễ dàng đưa về dạng trên để giải

1.3. Bài toán quy hoạch phân tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến tính

Bài toán quy hoạch sau đây gọi là bài toán quy hoạch phân tuyến tính với miền ràng buộc là hệ bất phương trình tuyến:

$$(P)\begin{cases} f(x) = \dfrac{L_1(x)}{L_2(x)} \to \min \\ x \in P := \ \ x \in \mathbb{R}^n : \langle A^i, x \rangle + b_i \le 0, i = 1, 2, ..., m \end{cases}$$

Trong đó $L_1 \ \ x \ \ = \langle A^0, x \rangle + b_0$, $L_2 \ \ x \ \ = \langle C^0, x \rangle + d_0$, A^0, A^i, C^0, $x \in \mathbb{R}^n$, A^0, A^i, C^0 là các véc tơ dòng , $m \ge n$, $A^0(a_{01}, a_{02}, ..., a_{0n})$, $C^0(c_{01}, c_{02}, ..., c_{0n})$, A^i $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \neq O(0,...,0)$, $b_i \in \mathbb{R}^1$, $i=1, 2, ..., m$. Hạng của hệ A^i ($i=1, 2, ..., m$) bằng n, giả thiết này rất bình thường bởi miền ràng buộc P của bài toán quy hoạch phân tuyến tính bao giờ cũng có ràng buộc về dấu của biến x.

Rõ ràng các bài toán quy hoạch phân tuyến tính bất kỳ đều có thể đưa về dạng trên với một vài giả thiết thông thường khác như là $L_2(x) \neq 0$ trên miền xác định P.

1.4. Một số mô hình bài toán thực tế đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính và phân tuyến tính:

1.4.1. Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Giả sử một xí nghiệp sản xuất n loại sản phẩm và sử dụng m loại nguyên liệu khác nhau, c_j là lãi suất (hay giá bán) đối với một đơn vị sản phẩm j ($j = 1,\dots, n$), a_{ij} là suất chi phí tài nguyên loại i để sản xuất một đơn vị sản phẩm loại j, b_i là lượng dự trữ tài nguyên loại i ($i = 1,\dots,m$). Gọi x_j là lượng sản phẩm loại j ($j = 1,\dots, n$) mà xí nghiệp sản xuất. Trong các điều kiện đã cho, hãy xác định các giá trị x_j ($j = 1,\dots, n$) sao cho tổng tiền lãi (hay tổng giá trị sản lượng hàng hóa) là lớn nhất với số tài nguyên hiện có.

Mô hình toán học có dạng bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

với các điều kiện

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b_i \qquad i = 1,\dots, m$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1,\dots, n$$

1.4.2. Bài toán cái túi

Một người du lịch muốn đem theo một cái túi có thể đựng được các đồ vật nặng không quá b *kilogam*. Có n loại đồ vật mà anh ta dự định đem theo. Mỗi một đồ vật loại j có khối lượng a_j *kilogam* và giá trị c_j.Người du lịch muốn chất vào túi các đồ vật sao cho tổng giá trị đồ vật đem theo là lớn nhất.

Ký hiệu x_j là số đồ vật loại j sẽ chất vào túi. Ta có bài toán sau:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots, n$$

$$x_j \text{ - nguyên}, \; j = 1,...,n$$

Đây là một bài toán quy hoạch nguyên.

1.4.3. Bài toán mua (thuê) máy bay tối ưu:

Để mở rộng hoạt động, hãng hàng không dự định mua hoặc thuê K loại máy bay (B777, B767, A321, A330, A320, AT7,...) ta gọi tương ứng là loại máy bay *k (k=1, 2, ..., K)*. máy bay loại k có giá mua (thuê) là c_k và có thời gian sử dụng là T_k năm. Hãng dự định mua (thuê) tối đa là N máy bay trong các loại máy bay trên với số vốn đầu tư hiện có là V , Bài toán cần giải quyết là hãng hàng không nên mua bao nhiêu máy bay mỗi loại để tổng thời gian sử dụng là nhiều nhất?

Ta gọi x_k là số lượng máy bay loại k cần mua, khi đó mô hình bài toán đặt ra là:

$$M = \sum_{k=1}^{K} T_k . x_k \to max \qquad (1.5)$$

Với các ràng buộc:

$$\sum_{k=1}^{K} x_k \le N$$

$$\sum_{k=1}^{K} c_k . x_k \le V$$

$$x_k \ge 0, k = 1, 2, ..., K \text{ , nguyên}$$

Đây là một bài toán quy hoạch nguyên.

1.4.4. Bài toán định giá thành sản phẩm[6]

Giả sử p_j là năng suất của phương pháp T_j ($j=1, 2, ..., n$) (tức là số lượng sản phẩm được sản xuất trong một đơn vị thời gian), r_j là chi phí trong một đơn vị thời gian đối với phương pháp T_j , x_j là số đơn vị thời gian sản xuất theo phương pháp T_J. như vậy giá thành của một đơn vị sản phẩm là:

$$c(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \Big/ \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

Bài toán đặt ra là cực tiểu hàm *c(x)* với các ràng buộc về vật tư, lao động, kỹ thuật, vốn, ….

1.4.5. Bài toán vận tải phân tuyến tính

Giả sử ta có *m* địa điểm phát hàng (kho hàng) A_i ($i=1, 2, ..., m$), mỗi địa điểm phát hàng *i* có thể cung cấp tối đa a_i đơn vị hàng . Và *n* địa điểm nhận hàng (nơi tiêu thụ) B_j ($j=1, 2, ...,n$), mỗi địa điểm nhận hàng *j* cần phải nhận tối thiểu b_j đơn vị hàng. p_{ij} là lợi nhuận thu được khi vận chuyển một đơn vị hàng từ A_i đến B_j

d_{ij} là chi phí vận chuyển một đơn vị hàng từ A_i đến B_j. p_0 và d_0 là các lợi nhuận và chi phí khác ngoài vận chuyển.

Gọi x_{ij} là số lượng hàng cần vận chuyển từ A_i đến B_j. khi đó bài toán đặt ra là:

$$(L)\left\{ f(x)=\frac{L_1(x)}{L_2(x)}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_{ij}+p_0}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_{ij}x_{ij}+d_0}\to \min \right.$$

Với các ràng buộc

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i, i=1.2,...,m$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\ge b_j, j=1,2,...,n$$

$$x_{ij}\ge 0, i=1,2,...,m; j=1,2,...,n.$$

1.5. Một số khái niệm và tính chất của hàm gần lồi-gần lõm

Trong mục này chúng ta nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản của một lớp hàm có liên quan mật thiết với hàm tuyến tính và phân tuyến tính. Như chúng ta đã biết một hàm gần lồi liên tục (không nhất thiết khả vi) thì cực tiểu địa phương là cực tiểu tuyệt đối trên miền xác định của nó, còn một hàm gần lõm thì nếu nó có cực tiểu trên miền xác định của nó và miền xác định có điểm cực biên thì cực tiểu sẽ đạt tại ít nhất một điểm cực biên của miền xác định. Chính vì thế ta có thể dựa trên các khái niệm và tính chất của hàm gần lồi-gần lõm nhắc lại dưới xây dựng các thuật toán kiểu đơn hình để giải bài toán cực tiểu hàm gần lồi-gần lõm trên miền ràng buộc thuyến tính ([1],[2]). Rõ ràng hàm tuyến tính và phân tuyến tính đều thuộc lớp hàm gần lồi-gần lõm trên miền xác định. Chính vì thế ta có thể cải tiến các thuật toán đã đề nghị trong [1] và [2] để xây dựng các thuật toán giải cho bài toán quy hoạch phân tuyến tính và tuyến tính.

1.5.1. Tập lồi đa diện

Định nghĩa : Một tập lồi mà là giao của một số hữu hạn nửa không gian đóng gọi là *tập lồi đa diện*.Nói cách khác, đó là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các bất phương trình tuyến tính :

$$\langle a^i, x\rangle \le b_i, i = 1,\ldots,m (a^i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}) \qquad (1.4)$$

nghĩa là tập các x nghiệm đúng $Ax \le b$ với A là một ma trận cấp m*n và $b \in \mathbb{R}^m$

Vì một phương trình tuyến tính có thể biểu diễn tương đương bằng hai bất phương trình tuyến tính nên một tập lồi đa diện cũng là tập nghiệm của một hệ các phương trình và bất phương trình tuyến tính :

$$\langle a^i, x\rangle = b_i,\ i = 1,\ldots,p$$

$$\langle a^i, x\rangle \le b_i, \quad i = p+1,\ldots,m$$

Hạng của hệ bất phương tuyến tính (1.4) được định nghĩa bằng hạng của ma trận A. Nếu hạng của hệ này bằng m thì ta nói hệ *độc lập tuyến tính.*

Một tập lồi đa diện có thể không bị chặn (không giới nội). Một tập lồi đa diện mà đồng thời là một nón lồi (tương ứng với trường hợp b=0) gọi là một *nón lồi đa diện*.Một tập lồi đa diện bị chặn còn được gọi là một *đa diện lồi*. Các đa giác lồi theo nghĩa thông thường trong $\mathbb{R}^2$ là những ví dụ cụ thể về đa diện lồi.

Mỗi điểm cực biên của một tập lồi đa diện còn được gọi là một *đỉnh* của nó. Tập các đỉnh của C ký hiệu là $\ddot{c}$. Mỗi cạnh vô hạn của một tập lồi đa diện tương ứng với một phương cực biên của nó.