ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

ĐỖ THỊ HUỆ

MỘT SỐ LỚP HÀM DẠNG ĐẶC BIỆT VÀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

ĐỖ THỊ HUỆ

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số : 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS: HOÀNG VĂN HÙNG

Thái Nguyên - Năm 2014

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Một số bất đẳng thức nổi tiếng như bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Jensen, bất đẳng thức Karamata,...liên quan đến các hàm lồi và các hàm lõm. Một số các bất đẳng thức nổi tiếng khác như bất đẳng thức Mincowski, Holder,...liên quan đến các hàm nửa cộng tính và thuần nhất dương. Điều này chứng tỏ nhiều bất đẳng thức quan trọng là hệ quả của các tính chất hàm số thuộc một lớp đặc biệt nào đó. Do đó nghiên cứu các tính chất của các hàm số có tính chất đặc biệt giúp phát hiện các bất đẳng thức mới và đôi khi là các cách chứng minh mới, đơn giản hơn các chứng minh đã biết. Bản luận văn **"Một số lớp hàm dạng đặc biệt và các bất đẳng thức liên quan"** gồm Lời nói đầu, hai chương, phần kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1. HÀM LỒI VÀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN

Chương này trình bày định nghĩa hàm lồi, hàm lõm, các tính chất quan trọng của hàm lồi, hàm lõm và cách chứng minh của một loạt các bất đẳng thức nổi tiếng dựa trên tính chất của các hàm này: bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Jensen(dạng dãy và dạng tích phân), bất đẳng thức Holder(dạng dãy và dạng tích phân), bất đẳng thức Karamata,...và các hệ quả. Tác giả cũng trình bày chứng minh một loạt các bất đẳng thức khó trong chương trình toán sơ cấp dựa trên các bất đẳng thức nổi tiếng vừa kể trên. Một số trong các bất đẳng thức này, theo ý kiến chủ quan của tác giả, chỉ có thể chứng minh dựa trên lý thuyết hàm lồi (ví dụ bất đẳng thức Jensen dạng tích phân và một số các bất đẳng thức trong tam giác của mục 1.3.3).

Chương 2. HÀM LỒI NHIỀU BIẾN VÀ CÁC HÀM NỬA CỘNG TÍNH, THUẦN NHẤT DƯƠNG

Chương này xét các hàm lồi nhiều biến, các hàm nửa cộng tính, các hàm thuần nhất dương và các bất đẳng thức liên quan. Tư liệu của chương này được tuyển chọn từ các tài liệu [N.H. Bingham and A.J. Ostaszewski], [Janus Matkowski], [H.V.Hùng và L.M.Tiến]. Các hàm dưới cộng tính và thuần nhất dương trên một nón lồi K với đỉnh tại không trong không gian $\mathbf{R}^n$ là một lớp con của lớp các hàm lồi trên K và có nhiều tính chất khá đặc sắc. Tác giả trình bày một loạt các tính chất của hàm lồi nhiều biến, các hàm nửa cộng tính, thuần nhất dương, chứng minh một tổng quát hóa của một kết quả của Janus Matkowski trong bài báo [Janus Matkowski]. Dựa trên sự tổng quát hóa này tác giả đã đưa ra chứng minh ngắn của các bất đẳng thức Mincowski (thuận và nghịch) trong trường hợp tổng quát và bất đẳng thức Holder. Trong chương này tác giả cũng chứng minh một số khẳng định mô tả đặc trưng của các hàm dưới cộng tính và k – thuần nhất trên một nón lồi K trong không gian véc tơ thực V và cho áp dụng của các khẳng định này dưới dạng một số bài toán chứng minh bất đẳng thức (mệnh đề 2.4.4).

Cuối cùng tác giả trình bày một mở rộng của một kết quả trong [H.V.Hùng và L.M.Tiến] (định lý 2.4.6) và cho 3 ví dụ minh họa. Bản luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của T.S Hoàng Văn Hùng, Viện Khoa học Cơ bản - Đại học Hàng Hải Việt Nam. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thày hướng dẫn về các ý tưởng của bản luận văn cũng như sự tận tụy trong công việc hướng dẫn. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các thày cô trong khoa Toán –Tin, Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tạo các điều kiện thuận lợi để tác giả có thể hoàn thành bản luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 5 năm 2014

Người viết

Đỗ Thị Huệ

Chương 1

HÀM LỒI VÀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC LIÊN QUAN

Chương này trình bày khái niệm hàm lồi, các tính chất của hàm lồi và các bất đẳng thức liên quan. Tư liệu của chương này được tham khảo từ các tài liệu [Hardy, Littllewood,Polya] và [Zoran K. and others]

1.1 HÀM LỒI

1.1.1 Định nghĩa

Hàm một biến f(x) gọi là lồi trên khoảng số thực (a;b) nếu với mọi cặp số thực z,t thuộc khoảng (a;b), mọi số thực $\lambda \in (0;1)$ ta luôn có bất đẳng thức:

$$f(\lambda z + (1-\lambda)t) \leq \lambda f(z) + (1-\lambda)f(t) \tag{1.1}$$

Hàm f(x) gọi là lõm trên khoảng (a;b) nếu -f(x) lồi trên (a;b), nói cách khác, f(x) lõm trên (a;b) nếu với mọi cặp số thực z,t thuộc khoảng (a;b), mọi số thực $\lambda \in (0;1)$ ta luôn có bất đẳng thức:

$$f(\lambda z + (1-\lambda)t) \geq \lambda f(z) + (1-\lambda)f(t) \tag{1.2}$$

Nếu trong (1.1) và (1.2) khi z, t phân biệt ta có dấu bất đẳng thức thực sự thì hàm f(x) gọi là lồi chặt (tương ứng: lõm chặt) trên (a;b). Tính lồi, lõm của hàm f(x) trên một khoảng đóng hoặc nửa đóng được định nghĩa tương tự.

1.1.2 Tính chất của hàm lồi và hàm lõm

Tính chất 1. Nếu f(x) lồi trên khoảng (a;b) thì với 3 số thực phân biệt x, z, t thuộc khoảng (a;b) thoả mãn t < z ta luôn có:

$$\frac{\mathrm{f(t)-f(x)}}{\mathrm{t-x}} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \tag{1.3}$$

Chứng minh.

Giả sử a < t < x < z < b. Đặt : $\lambda = \dfrac{x-t}{z-t} \rightarrow 1-\lambda = \dfrac{z-x}{z-t}$

Vì f(x) lồi trên (a;b) ta có:

$$f(\lambda z + (1-\lambda)t) \leq \lambda f(z) + (1-\lambda)f(t)$$
$$\leftrightarrow f(x) \leq \lambda f(z) + (1-\lambda)f(t)$$
$$\leftrightarrow \lambda(f(x)-f(z)) \leq (1-\lambda)(f(t)-f(x))$$
$$\leftrightarrow \frac{x-t}{z-t}(f(x)-f(z)) \leq \frac{z-x}{z-t}(f(t)-f(x))$$
$$\leftrightarrow \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

Bây giờ giả sử a < x < t < z < b.

Áp dụng điều vừa chứng minh ta có:

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \leq \frac{f(z)-f(t)}{z-t} = \frac{f(z)-f(x)+f(x)-f(t)}{z-t}$$
$$\leftrightarrow (z-x+x-t)(f(x)-f(t)) \geq (x-t)(f(z)-f(x)+f(x)-f(t))$$
$$\leftrightarrow (z-x)(f(x)-f(t)) \geq (x-t)(f(z)-f(x))$$
$$\leftrightarrow \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

Cuối cùng, nếu a < t < z < x < b, áp dụng điều vừa chứng minh ta có:

$$\frac{f(z)-f(t)}{z-t} \leq \frac{f(x)-f(t)}{x-t}$$
$$\leftrightarrow (x-t)(f(z)-f(x)+f(x)-f(t)) \leq (z-x+x-t)(f(x)-f(t))$$
$$\leftrightarrow (x-t)(f(z)-f(x)) \leq (z-x)(f(x)-f(t))$$
$$\leftrightarrow \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

Vậy tính chất 1 được chứng minh hoàn toàn.

Nhận xét : Nếu f(x) là lồi chặt thì trong bất đẳng thức (1.3) dấu " $\leq$" được thay bằng dấu "<" vì theo cách đặt ta có $0 < \lambda < 1$.

Tính chất 2. Hàm f(x) lồi trên khoảng (a;b) liên tục và có đạo hàm một phía tại mọi điểm x thuộc khoảng (a;b), đồng thời $f'_{-}(x) \leq f'_{+}(x)$ với mọi x ∈ (a;b). Nếu f(x) xác định trên khoảng đóng [a;b], lồi trên khoảng mở (a;b), liên tục phải tại a, liên tục trái tại b thì f(x) lồi trên khoảng đóng [a;b].

(Các ký hiệu $f'_-(x), f'_+(x)$tương ứng chỉ đạo hàm trái và đạo hàm phải của hàm f tại x)

Chứng minh. Giả sử x là số tuỳ ý thuộc khoảng (a;b) và t < x < z. Theo tính chất 1 ta có:

$$\frac{\mathrm{f(t) - f(x)}}{\mathrm{t - x}} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

$$\leftrightarrow (z - x)(f(x) - f(t)) \leq (x - t)(f(z) - f(x)) \tag{1.4}$$

Cố định t và cho z $\rightarrow x^+$ trong (1.4) ta được:

$$\lim_{z \rightarrow x^+} \inf f(z) \geq f(x) \tag{1.5}$$

Bây giờ giả sử x < t < z. Lại dùng tính chất 1 ta có:

$$\frac{\mathrm{f(t) - f(x)}}{\mathrm{t - x}} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

$$\leftrightarrow (z - x)(f(t) - f(x)) \leq (t - x)(f(z) - f(x)) \tag{1.6}$$

Trong (1.6) cố định z và cho $t \rightarrow x^+$ ta được:

$$\lim_{t \rightarrow x^+} \sup \mathrm{f(t)} \leq \mathrm{f(x)} \tag{1.7}$$

Từ (1.5) và (1.7) suy ra: $\lim\limits_{z \rightarrow x^+} f(z) = f(x)$

Vậy f liên tục phải tại x. Chứng minh tương tự ta cũng nhận được f liên tục trái tại x. Vậy f liên tục tại x tuỳ ý thuộc khoảng (a;b).

Từ tính chất 1 ta suy ra đại lượng $\Delta_f(x, z) = \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$ là hàm của hai biến x, z, được xác định khi x, z phân biệt và thuộc khoảng (a,b), có tính chất đối xứng $\Delta_f(x, z) = \Delta_f(z, x)$. Giả sử t < x < z, theo (1.3) đại lượng $\Delta_f(x, z) = \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$ không giảm theo z trên (x; b) và bị chặn dưới bởi vế trái của (1.3). Do đó tồn tại giới hạn hữu hạn:

$$\frac{\mathrm{f(t) - f(x)}}{\mathrm{t - x}} \leq \lim_{z \rightarrow x^+} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f_+{}'(x) \tag{1.8}$$

Đại lượng $\Delta_f(t, x) = \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$ là hàm không giảm theo t trên (a;x) và bị chặn trên bởi vế phải của (1.8), do đó tồn tại giới hạn:

$$\lim_{t \rightarrow x^-} \frac{\mathrm{f(t) - f(x)}}{\mathrm{t - x}} = f_-{}'(x) \leq \lim_{z \rightarrow x^+} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f_+{}'(x)$$

Vậy phần đầu của tính chất 2 được chứng minh. Bây giờ giả sử f(x) lồi trên khoảng mở (a;b) và z = a, t$\in (a;b)$. Khi đó với z' tùy ý $\in (a;b)$ và $\lambda \in (0;1)$ ta có :

$$f(\lambda z' + (1-\lambda)t) \leq \lambda f(z') + (1-\lambda)f(t)$$

Cho z' dần tới a^+ và dùng tính liên tục của f(x) trên (a;b), tính liên tục phải của f(x) tại a từ bất đẳng thức trên ta nhận được bất đẳng thức:

$$f(\lambda a + (1-\lambda)t) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(t)$$

Vậy bất đẳng thức (1.1) trong định nghĩa 1.1.1 được thỏa mãn khi z = a, t $\in (a;b)$. Hoàn toàn tương tự ta có thể chứng minh được bất đẳng thức (1.1) được thỏa mãn khi z $\in (a;b)$, t = b hoặc z =a, t = b. Vậy f(x) lồi trên khoảng đóng [a;b].

Tính chất 3. Nếu f(x) có đạo hàm và f '(x) không giảm trên (a;b) thì f(x) lồi trên (a;b). Nếu f(x) có đạo hàm cấp hai f "(x) ≥ 0 trên (a;b) thì f(x) lồi trên (a;b). Nếu f '(x) không tăng trên (a;b) thì f(x) lõm trên (a;b). Nếu f(x) có đạo hàm cấp hai f "(x) ≤ 0 trên (a;b) thì f(x) lõm trên (a;b).

Chứng minh.

Vì điều kiện f "(x) ≥ 0 kéo theo f '(x) không giảm trên (a;b) nên chỉ cần chứng minh khẳng định thứ nhất. Giả sử t $<$ z là hai số thực tuỳ ý thuộc khoảng (a;b) và $0 < \lambda < 1$. Đặt : $x = \lambda z + (1-\lambda)t \rightarrow t < x < z$.

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm f trên các khoảng (t;x) và (x;z) ta được:

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)(f(x) - f(t)) + \lambda(f(x) - f(z)) \\ &= (1-\lambda)f'(\alpha)(x-t) + \lambda f'(\beta)(x-z) \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Trong đó $t < \alpha < x < \beta < z$. Vì $x - t = \lambda(z-t),\ z - x = (1-\lambda)(z-t)$, từ (1.9) ta có:

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)(f(x) - f(t)) + \lambda(f(x) - f(z)) \\ &= \lambda(1-\lambda)(z-t)(f'(\alpha) - f'(\beta)) \leq 0 \end{aligned} \qquad (1.10)$$

Bất đẳng thức (1.10) tương đương với bất đẳng thức:

$$f(\lambda z + (1-\lambda)t) \leq \lambda f(z) + (1-\lambda)f(t)$$