ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Bùi Thị Lan Hương

ỨNG DỤNG NGUYÊN LÝ DIRICHLET VÀO CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học
PGS. TS. TRỊNH THANH HẢI

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Mở đầu

Bất đẳng thức là chuyên đề quen thuộc và quan trọng đối với Toán học và người làm Toán, học Toán. Các bài toán về bất đẳng thức có mặt trong hầu hết đề thi học sinh giỏi, Đại học, Olympic... Trong phân phối chương trình chuyên sâu Toán 10 Trung học phổ thông do Bộ giáo dục ấn hành, ngoài nội dung bắt buộc, chuyên đề bất đẳng thức chiếm khoảng 12 tiết trong số 55 tiết chuyên đề. Tuy nhiên đây là chuyên đề khó vì đòi hỏi người làm Toán phải có vốn kiến thức vững vàng, đồng thời linh hoạt, sáng tạo vận dụng kiến thức khi giải Toán. Cũng chính vì lí do đó mà các bài toán về bất đẳng thức vô cùng phong phú, đa dạng. Nó khơi gợi óc sáng tạo, tư duy, góp phần hình thành, củng cố và phát triển năng lực phân tích, giải quyết vấn đề của người học Toán.

Nguyên lý Dirichlet được phát biểu đầu tiên bởi nhà toán học Đức Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) như sau: *"nếu nhốt $n+1$ con thỏ vào n cái chuồng thì bao giờ cũng có một chuồng chứa ít nhất 2 con thỏ"*. Đây là phương pháp thông dụng và hiệu quả để giải nhiều dạng toán.

Hiện nay có một số đề tài đã tìm hiểu và ứng dụng nguyên lí Dirichlet vào giải một vài dạng toán nhưng chưa có ai tập trung khai thác rõ việc vận dụng nguyên lý Dirichlet vào chứng minh bất đẳng thức. Mặt khác vấn đề này đã được nêu trong tạp chí như tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, nhưng mới chỉ dừng ở ý tưởng, vài ví dụ đơn giản và đưa ra các bài tập.

Vì những lí do trên nên tôi chọn đề tài ***"Ứng dụng nguyên lý Dirichlet vào chứng minh bất đẳng thức"*** làm đề tài luận văn Thạc sĩ.

Luận văn gồm hai nhiệm vụ nghiên cứu chính

- Tổng quan về bất đẳng thức ở phổ thông.
- Vận dụng nguyên lý Dirichlet vào chứng minh một vài bất đẳng thức.

Ngoài phần mở đầu và phần kết luận, luận văn gồm hai chương

Chương 1: Sơ lược về chứng minh bất đẳng thức

Nội dung chương 1 giới thiệu vài phương pháp chứng minh bất đẳng thức kèm theo ví dụ minh họa cho từng phương pháp ở trường phổ thông.

Chương 2: Ứng dụng nguyên lý Dirichlet vào chứng minh bất đẳng thức

Nội dung chương 2 nêu tổng quan về nguyên lý Dirichlet, ứng dụng nguyên lý Dirichlet vào chứng minh bất đẳng thức và một số ví dụ minh họa chứng minh bất đẳng thức bằng cách sử dụng nguyên lý Dirichlet. Cuối chương 2 là một số ví dụ để độc giả tham khảo và tự chứng minh.

Trong quá trình làm luận văn, chúng tôi đã tham khảo, sử dụng các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi, giáo trình của GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu, Tạp chí Toán học và tuổi trẻ từ năm 1964, đề thi Đại học từ năm 1970 đến nay, một số đề thi Olympic Toán...

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới Ban Giám hiệu, khoa Toán - Tin, phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, các thầy cô giáo đã trang bị kiến thức và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu. Xin bày tỏ lòng cảm ơn chân thành và sâu sắc tới PGS.TS. Trịnh Thanh Hải, người đã tận tình chỉ bảo, hướng dẫn tôi hoàn thành luận văn.

Mặc dù luận văn đã hoàn thành nhưng không tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được những lời đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn về những mặt tích cực và hạn chế để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2014

Học viên

Bùi Thị Lan Hương

Chương 1

Sơ lược về chứng minh bất đẳng thức

1.1 Bất đẳng thức

• Khái niệm bất đẳng thức

Định nghĩa 1.1. Cho hai số thực a và b. a được gọi là lớn hơn b, kí hiệu $a > b$ nếu hiệu $a - b$ là một số dương; a được gọi là lớn hơn hoặc bằng b, kí hiệu $a \geq b$ nếu hiệu $a - b$ là một số không âm; a được gọi là nhỏ hơn b, kí hiệu $a < b$ nếu hiệu $a - b$ là một số âm; a được gọi là nhỏ hơn hoặc bằng b, kí hiệu $a \leq b$ nếu hiệu $a - b$ là một số không dương.

• Một vài tính chất của bất đẳng thức

Với các số thực a, b, c và số tự nhiên n luôn có tính chất

$$\begin{aligned}
a > b &\iff a - b > 0.\\
a > b &\iff a + c > b + c.\\
a > b &\iff a^{2n+1} > b^{2n+1}.\\
\mid a \mid > \mid b \mid &\iff a^{2n} > b^{2n}.\\
a \geq b &\iff a = b \text{ hoặc } a > b.\\
\text{Với } a > b, c > 0 &\iff ac > bc.\\
\text{Với } a > b, c < 0 &\iff ac < bc.\\
a > b, b > c &\iff a > c.\\
\mid a \mid \leq \alpha &\iff \alpha \geq 0 \text{ và } -\alpha \leq a \leq \alpha.
\end{aligned}$$

1.2 Một vài phương pháp chứng minh bất đẳng thức

1.2.1 Phương pháp biến đổi tương đương

• **Ý tưởng**

- Để chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp biến đổi tương đương ta sử dụng một số biến đổi sơ cấp để đưa bất đẳng thức cần chứng minh về bất đẳng thức mới, trong đó bất đẳng thức mới hiển nhiên đúng hoặc ta có thể chứng minh được.

$$A > B \Leftrightarrow C > D$$

(trong đó $C > D$ là bất đẳng thức hiển nhiên đúng hoặc ta có thể chứng minh được.)

- Có 2 phương pháp biến đổi tương đương là biến đổi tương đương trực tiếp hoặc đặt ẩn phụ rồi biến đổi tương đương.

• **Ví dụ minh họa**

Ví dụ 1.1 (JMO 2004 - [5]). *Cho* $a, b, c > 0, a + b + c = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} \leq 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right). \tag{1.1}$$

Nhận xét 1.1. Các số hạng ở vế trái đều có dạng $\dfrac{1+x}{1-x}$ nên ta viết

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{2x}{1-x}.$$

Giải

Ta biến đổi bất đẳng thức (1.1)

$$\begin{aligned}
(1.1) &\Leftrightarrow 3 + \frac{2a}{1-a} + \frac{2b}{1-b} + \frac{2c}{1-c} \leq 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right)\\
&\Leftrightarrow 2a\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{1-a}\right) + 2b\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1-b}\right) + 2c\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{1-c}\right) \geq 3\\
&\Leftrightarrow a\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b+c}\right) + b\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c+a}\right) + c\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{3}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{ab}{c(b+c)} + \frac{bc}{a(c+a)} + \frac{ca}{b(a+b)} \geq \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Ta có

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ac}{b}}\right)^2$$
$$=\left(\sqrt{\frac{ab}{c(b+c)}}\cdot\sqrt{b+c}+\sqrt{\frac{bc}{a(c+a)}}\cdot\sqrt{c+a}+\sqrt{\frac{ac}{b(a+b)}}\cdot\sqrt{a+b}\right)^2.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacovski ta có

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{c(b+c)}}\cdot\sqrt{b+c}+\sqrt{\frac{bc}{a(c+a)}}\cdot\sqrt{c+a}+\sqrt{\frac{ac}{b(a+b)}}\cdot\sqrt{a+b}\right)^2$$

$$\leq\left[\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ac}{b(a+b)}\right][2(a+b+c)]$$

nên

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ac}{b}}\right)^2\leq\left[\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ac}{b(a+b)}\right]\left[2\left(a+b+c\right)\right].$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$$

nên

$$\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ac}{b}}\right)^2\geq 3\left(\sqrt{\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{bc}{a}\cdot\frac{ac}{b}}+\sqrt{\frac{ac}{b}\cdot\frac{ab}{c}}\right)$$

$$=3(b+c+a).$$

Suy ra

$$3(a+b+c)\leq\left[\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ac}{b(a+b)}\right]\left[2\left(a+b+c\right)\right].$$

Hay

$$\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ac}{b(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

Ta suy ra

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\leq 2\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\right).$$

Bất đẳng thức (1.1) được chứng minh.

Ví dụ 1.2 (IMO 1995 - [5])**.** *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}. \tag{1.2}$$

Nhận xét 1.2. Vai trò của a, b, c trong bất đẳng thức là như nhau. Mặt khác vế trái của bất đẳng thức chứa a^2, b^2, c^2 và a, b, c nhưng không có bậc hai dạng ab, bc, ca. Do đó ta đặt ẩn phụ cho ab, bc, ca.

Giải

Đặt

$$bc = x, ca = y, ab = z.$$

Khi đó theo giả thiết $abc = 1$ ta được

$$\frac{1}{a} = x, \frac{1}{b} = y, \frac{1}{c} = z.$$

Suy ra

$$a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, kết hợp với giả thiết $abc = 1$ ta có

$$x + y + z = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 3.$$

Biến đổi bất đẳng thức (1.2) ta có

$$\begin{aligned}
(1.2) \Leftrightarrow \frac{x^3}{\dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}} + \frac{y^3}{\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x}} + \frac{z^3}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}} &\geq \frac{3}{2} \\
\Leftrightarrow \frac{x^3.yz}{y+z} + \frac{y^3.zx}{z+x} + \frac{z^3.xy}{x+y} &\geq \frac{3}{2} \\
\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &\geq \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Do vai trò của a, b, c cũng như của x, y, z là như nhau, không làm mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết

$$a \geq b \geq c > 0.$$

Suy ra

$$0 < x \leq y \leq z.$$

Khi đó

$$\begin{cases} x^2 \le y^2 \le z^2 \\ \dfrac{1}{y+z} \le \dfrac{1}{z+x} \le \dfrac{1}{x+y}. \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{x^2}{y+x} + \frac{y^2}{z+y} + \frac{z^2}{x+z}$$

và

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{x^2}{x+z} + \frac{y^2}{y+x} + \frac{z^2}{z+y}.$$

Cộng vế với vế ta được

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+z^2}{x+z} + \frac{y^2+x^2}{y+x} + \frac{z^2+y^2}{z+y}\right).$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$x^2 + z^2 \ge \frac{(x+z)^2}{2}$$

$$y^2 + x^2 \ge \frac{(y+x)^2}{2}$$

$$z^2 + y^2 \ge \frac{(z+y)^2}{2}$$

và kết hợp với $x + y + z \ge 3$ ta được

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+z^2}{x+z} + \frac{y^2+x^2}{y+x} + \frac{z^2+y^2}{z+y}\right) \ge \frac{1}{2}(x+y+z) \ge \frac{3}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{3}{2}.$$

Vậy

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}.$$

Bất đẳng thức (1.2) được chứng minh.

1.2.2 Phương pháp phản chứng

• **Ý tưởng**

Phương pháp phản chứng để chứng minh bất đẳng thức thường dùng khi điều kiện bài toán thì phức tạp, còn bất đẳng thức cần chứng minh thì đơn giản. Khi đó ta đảo điều kiện và kết luận của bài toán cho nhau.

Muốn chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$ bằng phương pháp phản chứng, ta giả sử $A < B$. Bằng lập luận ta suy ra điều mâu thuẫn. Do đó điều giả sử là sai. Vậy nên bất đẳng thức $A \geq B$ đúng.

• **Ví dụ minh họa**

Ví dụ 1.3 (IMO 2001 - [1])**.** *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1. \tag{1.3}$$

Nhận xét 1.3. Để mất dấu căn thức ở vế trái của bất đẳng thức ta đặt ẩn phụ cho từng số hạng.

Giải

Đặt

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \\ y &= \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \\ z &= \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}. \end{aligned}$$

Vì a, b, c là các số thực dương nên x, y, z cũng là các số thực dương.

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} < \frac{a}{\sqrt{a^2}} = 1 \\ y &= \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} < \frac{b}{\sqrt{b^2}} = 1 \\ z &= \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} < \frac{c}{\sqrt{c^2}} = 1. \end{aligned}$$

Do đó $x, y, z \in (0; 1)$.