ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MAI THỊ LAN PHƯƠNG

VỀ CÁC ĐỒNG NHẤT THỨC CỦA EULER VÀ ROGERS- RAMANUJAN TRONG PHÂN HOẠCH CÁC SỐ TỰ NHIÊN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MAI THỊ LAN PHƯƠNG

VỀ CÁC ĐỒNG NHẤT THỨC CỦA EULER VÀ ROGERS- RAMANUJAN TRONG PHÂN HOẠCH CÁC SỐ TỰ NHIÊN

ON THE IDENTITIES
OF EULER AND ROGERS- RAMANUJAN
IN THE NUMBER PARTITIONS

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS Lê Thị Thanh Nhàn

Thái Nguyên - 2014

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tại Trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên. Tôi được nhận đề tài và nghiên cứu dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Lê Thị Thanh Nhàn, luận văn "Về các đồng nhất thức của Euler và Rogers-Ramanujan trong lí thuyết phân hoạch các số tự nhiên" đã được hoàn thành. Có được kết quả này, là do sự dạy bảo, hướng dẫn hết sức tận tình và nghiêm khắc của Cô. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới Cô và gia đình!

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo sau đại học và Khoa Toán- Tin của Trường Đại học Khoa học- Đại học Thái Nguyên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại Trường và trong thời gian nghiên cứu hoàn thành luận văn này. Sự giúp đỡ nhiệt tình và thái độ thân thiện của các thày cô giáo, các cán bộ thuộc Phòng Đào tạo, Khoa Toán- Tin đã để lại trong lòng mỗi chúng tôi những ấn tượng hết sức tốt đẹp.

Tôi xin cảm ơn UBND huyện Xín Mần, Phòng Giáo dục và Đào tạo huyện Xín Mần nơi tôi đang công tác đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi hoàn thành khóa học này.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và các thành viên trong lớp cao học Toán K6A (khóa 2012-2014) đã quan tâm, tạo điều kiện, cổ vũ và động viên để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Tôi xin trân trọng cảm ơn!

Lời nói đầu

Một *phân hoạch* của số nguyên dương n là một cách viết n thành tổng của các số nguyên dương. Hai cách viết n thành tổng các số nguyên dương chỉ sai khác thứ tự các số hạng được coi là hai biểu diễn của cùng một phép phân hoạch, chẳng hạn $10 = 1 + 4 + 5$ và $10 = 4 + 1 + 5$ là 2 cách biểu diễn của cùng một phân hoạch của 10. Vì thế, trong luận văn này chúng ta quy ước viết mỗi phép phân hoạch của n dưới dạng một dãy $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ các số nguyên dương giảm dần (hoặc tăng dần) sao cho $n = p_1 + \ldots + p_k$. Các số $p_1, \ldots, p_k$ được gọi là các *thành phần* hay các *số hạng* của phép phân hoạch.

Vào Thế kỉ 18, Leonhard Euler là người đầu tiên giới thiệu và nghiên cứu lí thuyết phân hoạch các số tự nhiên. Kí hiệu $P(n)$ là số phép phân hoạch của n, ta gọi $P(n)$ là *hàm phân hoạch*. Sau khi Euler đưa ra một công thức truy hồi để tính $P(n)$, hàng trăm nhà toán học khác đã cố gắng tìm các thuật toán để tính $P(n)$, nhưng cho đến nay nó vẫn đang là một thách thức lớn của Toán học. Từ các đồng nhất thức nổi tiếng về $P(n)$ phát hiện bởi Ramanujan năm 1921, người ta tiếp tục quan tâm đến tính chất đồng nhất thức của $P(n)$. Năm 1960, M. Newman đã giả thuyết rằng với mỗi cặp số tự nhiên m, r tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho $P(n) \equiv r(mod\ m)$. Kết quả tốt nhất trả lời cho bộ phận của giả thuyết này thuộc về Ken Ono trong bài báo trên tạp chí Ann. Math. năm 2000 và Ahlgren-Boylan trong bài báo trên Invent. Math năm 2003.

Luận văn này quan tâm đến một số đồng nhất thức quan trọng về phân hoạch có điều kiện, tức là những phân hoạch sao cho các số hạng của nó thỏa mãn một điều kiện nào đó. Mục đích của luận văn là trình bày chi tiết chứng minh một số đồng nhất thức của Euler, Rogers-Ramanujan và các mở rộng của chúng liên quan đến các phân hoạch có điều kiện.

Đồng nhất thức của Euler. *Số phân hoạch của n thành các số hạng phân biệt chính là số phân hoạch của n thành những số hạng lẻ.*

Đồng nhất thức của Rogers-Ramanujan. *Số phân hoạch của n thành những số hạng khác nhau ít nhất* 2 *đơn vị bằng số phân hoạch của n thành những số hạng đồng dư với* 1 *hoặc với* 4 *theo môđun* 5.

Luận văn chủ yếu dựa theo 3 tài liệu sau đây:

1. S. Ahlgren and M. Boylan, *Arithmetic properties of the partition function*, Invent. Math. 153 (2003), no. 3, 487-502.

2. H. L. Alder, *Partition identities - from Euler to the present*, The American Mathematical Monthly, 76 (1969), 733-746.

3. G. E. Andrews, *The theory of partitions*, Cambridge University Press, 1998.

Luận văn gồm 2 chương. Chương 1 dành để trình bày các khái niệm và tính chất cơ bản về phân hoạch các số tự nhiên, tam giác Pascal và phân hoạch có điều kiện. Chương 2 trình bày các kết quả chính của luận văn, bao gồm đồng nhất thức của Euler và các mở rộng; đồng nhất thức của Rogers- Ramanujan và các mở rộng.

Phương pháp chính được sử dụng để chứng minh các kết quả là phương pháp đồ thị, phương pháp dùng hàm sinh và sử dụng khéo léo song ánh giữa các tập hợp.

Chương 1

Khái niệm phép phân hoạch các số tự nhiên

Phép phân hoạch số tự nhiên được nghiên cứu đầu tiên bởi Leonhard Euler (15/04/1707 - 18/09/1783), một nhà toán học thiên tài người Thụy Sĩ của Thế kỉ 18. Khái niệm phép phân hoạch số tự nhiên đã xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học, Vật lí. Một trong những kết quả bí ẩn và nổi tiếng trong lí thuyết phân hoạch số tự nhiên là các đồng nhất thức Roger-Ramanujan, đã được sử dụng và gắn kết với những chuyên ngành Tổ hợp, Lí thuyết số, Đa thức đối xứng, Nhóm đối xứng, Lí thuyết biểu diễn nhóm, Thống kê Vật lí, Lí thuyết xác xuất, Giải tích phức, ...

Trong suốt chương này, luôn giả thiết n là một số nguyên dương. Mục đích của Chương là giới thiệu một số khái niệm và tính chất cơ sở trong lí thuyết phân hoạch các số tự nhiên, hàm phân hoạch, phép phân hoạch có điều kiện.

1.1 Phép phân hoạch các số tự nhiên

1.1.1 Định nghĩa. *Một phép phân hoạch* của số nguyên dương n là một biểu diễn n thành tổng của các số nguyên dương.

Một phân hoạch có thể biểu diễn thành nhiều dạng. Chẳng hạn,

$6 = 5 + 1$ và $6 = 1 + 5$ là hai dạng biểu diễn của cùng một phân hoạch số 6 thành hai thành phần 5 và 1. Như vậy, hai dạng biểu diễn của n thành tổng các số nguyên dương được xem là của cùng một phép phân hoạch nếu chúng chỉ khác nhau về thứ tự các số hạng. Cụ thể, hai dạng biểu diễn $n = a_1 + \ldots + a_r$ và $n = b_1 + \ldots + b_s$, trong đó $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ là các số nguyên dương được coi là của cùng một phân hoạch nếu $r = s$ và tồn tại một phép hoán vị σ của tập $\{1, 2, \ldots, r\}$ sao cho $a_i = b_\sigma(i)$ với mọi $i = 1, \ldots, r$. Cụ thể ta xét ví dụ sau

1.1.2 Ví dụ. Có 11 phép phân hoạch số 6 sau đây:

$6 = 6$ (phân hoạch thành một thành phần)

$6 = 4 + 2 = 5 + 1 = 3 + 3$ (phân hoạch thành hai thành phần)

$6 = 4 + 1 + 1 = 3 + 2 + 1 = 2 + 2 + 2$ (phân hoạch thành ba thành phần)

$6 = 3 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1$ (phân hoạch thành bốn thành phần)

$6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$ (phân hoạch thành năm thành phần)

$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (phân hoạch thành sáu thành phần).

Ta thấy, mỗi phân hoạch số n có nhiều dạng biểu diễn khác nhau (các biểu diễn phụ thuộc vào thứ tự của các hạng tử của phân hoạch). Vì thế, cho thuận tiện chúng ta quy ước chọn biểu diễn chuẩn là dạng biểu diễn $n = p_1 + \ldots + p_k$ sao cho các thành phần p_i xếp theo thứ tự từ lớn đến bé: $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_k$. Chẳng hạn trong 6 biểu diễn $6 = 1 + 2 + 3$, $6 = 3+1+2$, $6 = 1+3+2$, $6 = 3+2+1$, $6 = 2+1+3$, $6 = 2+3+1$ của cùng một phép phân hoạch số 6, chúng ta chọn dạng biểu diễn chuẩn $6 = 3 + 2 + 1$ vì bộ $(3, 2, 1)$ sắp theo thứ tự từ lớn đến bé.

1.1.3 Chú ý. Mỗi phân hoạch số n có duy nhất một dạng biểu diễn chuẩn, tức là biểu diễn n thành tổng các số nguyên dương xếp theo thứ tự từ lớn đến bé. Vì thế, ta có thể coi một phân hoạch số n là một bộ

$(p_1, \ldots, p_k)$ các số nguyên dương thỏa mãn $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_k$ và tổng của chúng đúng bằng n. Với kí hiệu như vậy, thay cho cách viết 11 phân hoạch sau đây của số 6

$$\begin{aligned}
&6 = 6,\ 6 = 4 + 2,\ 6 = 5 + 1,\ 6 = 3 + 3,\ 6 = 4 + 1 + 1, \\
&6 = 3 + 2 + 1,\ 6 = 2 + 2 + 2,\ 6 = 3 + 1 + 1 + 1, \\
&6 = 2 + 2 + 1 + 1,\ 6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1,\ 6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
\end{aligned}$$

ta có thể viết lại các phân hoạch này như sau

$$\begin{aligned}
&(6), (4, 2), (5, 1), (3, 3), (4, 1, 1), \\
&(3, 2, 1), (2, 2, 2), (3, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1), \\
&(2, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)
\end{aligned}$$

1.1.4 Định nghĩa. Số phân hoạch của n được kí hiệu là $P(n)$. Hàm $P(n)$ được gọi là *hàm phân hoạch*. Cho thuận lợi, ta quy ước $P(0) = 1$.

Ta xét một số ví dụ sau

1.1.5 Ví dụ. Ta có $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$, $P(4) = 5$, $P(5) = 7$, $P(8) = 22$.

Rõ ràng $P(1) = 1$ vì (1) là phân hoạch duy nhất của 1.

Ta có $P(2) = 2$ vì 2 có hai phân hoạch là $(2), (1, 1)$.

Ta có $P(3) = 3$ vì 3 có 3 phân hoạch là $(3), (2, 1), (1, 1, 1)$.

Ta có $P(4) = 5$ vì 4 có 5 phân hoạch là $(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)$.

Ta có $P(5) = 7$ vì có đúng 7 phân hoạch số 5 sau đây

$$(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)$$

Ta có $P(8) = 22$ vì 8 có 22 phân hoạch sau đây

$$(8), (7,1), (6,2), (5,3), (4,4), (6,1,1), (5,2,1), (4,3,1),$$
$$(4,2,2, (3,3,2), (5,1,1,1), (4,2,1,1), (2,2,2,2), (3,2,2,1),$$
$$(3,3,1,1), (4,1,1,1,1), (3,2,1,1,1), (2,2,1,1,1,1), (3,1,1,1,1,1,1),$$
$$(2,2,2,1,1), (2,1,1,1,1,1,1), (1,1,1,1,1,1,1,1)$$

Kết quả tiếp theo là một đánh giá của hàm phân hoạch.

1.1.6 Mệnh đề. *Với mỗi số nguyên dương n ta có*

$$P(2n) \geq P(n) + P(n-1) + \ldots + P(2) + P(1).$$

Chứng minh. Với mỗi $r \in \{n, n-1, \ldots, 2, 1\}$, kí hiệu B_r là tập các phép phân hoạch số r. Khi đó số phần tử của B_r là $P(r)$. Giả sử $(p_1, \ldots, p_k) \in B_r$ là một phép phân hoạch số r. Khi đó $r \geq p_1 \geq \ldots \geq p_k \geq 1$. Vì $2n-r \geq n \geq r$ nên $2n-r \geq p_1 \geq \ldots \geq p_k \geq 1$. Do đó $(2n-r, p_1, \ldots, p_k)$ là một phép phân hoạch số $2n$. Vì thế, với mỗi $r \in \{n, n-1, \ldots, 2, 1\}$, có đúng $P(r)$ phép phân hoạch số n sao cho thành phần thứ nhất là $2n-r$ và các thành phần còn lại không vượt quá r. Rõ ràng, nếu $r, r' \in \{n, n-1, \ldots, 2, 1\}$ với $r \neq r'$ thì hai phép phân hoạch $(2n-r, p_1, \ldots, p_k)$ và $(2n-r', p_1, \ldots, p_k)$ của số $2n$ là khác nhau, với mọi $(p_1, \ldots, p_k) \in B_r$. Vì thế $P(2n)$ lớn hơn hoặc bằng số phần tử của $\bigcup_{r=1}^{n} B_r$, tức là

$$P(2n) \geq P(n) + P(n-1) + \ldots + P(2) + P(1).$$

$\square$

1.2 Tam giác Pascal

Trong tiết này, chúng ta cùng tìm hiểu cách tính số phân hoạch $P(n)$ của n theo một biểu đồ hình tam giác, gọi là *tam giác Pascal*. Trong suốt luận văn này ta dùng kí hiệu sau.