LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

VẬN DỤNG SỐ PHỨC

vào

Giải Toán sơ cấp

Nguyễn Thị Hoa
ĐHKH ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

Ngày 10 tháng 04 năm 2014

Mục lục

Lời nói đầu

Số phức xuất hiện do nhu cầu phát triển của Toán học về giải những phương trình đại số. Từ khi ra đời số phức đã thúc đẩy toán học phát triển mạnh mẽ và giải quyết được nhiều vấn đề của khoa học và kỹ thuật. Đối với học sinh hệ THPT thì số phức là một nội dung còn mới mẻ, với thời lượng không nhiều, học sinh mới chỉ biết được những kiến thức rất cơ bản của số phức, việc khai thác các ứng dụng của số phức còn hạn chế, đặc biệt là việc sử dụng số phức như một phương tiện để giải các bài toán Hình học phẳng là một vấn đề khó , đòi hỏi học sinh phải có năng lực giải toán nhất định, biết vận dụng kiến thức đa dạng của toán học. Tuy nhiên dạy cho học sinh khá giỏi biết ứng dụng số phức vào việc giải bài toán hình học phẳng có tác dụng lớn trong việc bồi dưỡng năng lực giải toán cho học sinh đồng thời giúp học sinh khắc sâu, tổng hợp, hệ thống hóa được kiến thức cơ bản dạng toán quen thuộc, giải quyết được một số bài toán khó, phức tạp chưa có thuật toán. Để đáp ứng được điều đó cũng đòi hỏi giáo viên phải có hiểu biết cần thiết, có cách nhìn sâu sắc hơn về các ứng dụng của số phức.

Mặc dù vậy trong chương trình toán học phổ thông số phức được đưa vào giảng dạy ở phần giải tích toán lớp 12. Toàn bộ phần số phức mới chỉ đưa ra định nghĩa số phức và một vài tính chất đơn giản của nó. Ứng dụng của số phức trong giải toán mới chỉ dừng lại ở một vài bài tập hình học đơn giản, nhằm giúp các em học sinh khá giỏi có cách nhìn toàn diện hơn về số phức, đặc biệt là sử dụng số phức để giải một số bài toán sơ cấp nên tôi đã chọn đề tài luận văn: **Vận dụng của số phức để giải toán sơ cấp**.

Luận văn gồm lời nói đầu, ba chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo

Chương 1. "Kiến thức chuẩn bị", chương này nhắc lại một số kiến thức về số phức và trường $\mathbb{C}$

Chương 2. "Vận dụng số phức trong hình học", chương này đưa ra một số bất đẳng thức trong hình học qua số phức, biểu diễn phép quay qua số phức và tỷ số kép của bốn số phức.

Chương 3."Thể Quaternion và biểu diễn", chương này xây dựng thể Quaternion và biểu diễn dạng bậc hai thành tích.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên chắc chắn luận văn còn có những thiếu sót nhất định, kính mong quý thầy cô và các bạn đóng góp ý kiến để tác giả tiếp tục hoàn thành luận văn này.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Số phức và trường $\mathbb{C}$

Xét Tích de Carte $T = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$ và đưa ra định nghĩa:

$$\begin{aligned}(a,b) &= (c,d) \text{ khi và chỉ khi } a = c, b = d\\ (a,b) &+ (c,d) = (a+c, b+d)\\ (a,b) &. (c,d) = (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

Để đơn giản, viết $(a,b).(c,d)$ qua $(a,b)(c,d)$. Từ định nghĩa phép nhân:

(i) Với $i = (0,1) \in T$ có $i^2 = i.i = (0,1)(0,1) = (-1,0)$

(ii) $(a,b)(1,0) = (a,b) = (1,0)(a,b)$

(iii) $(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1), \ \forall\ (a,b) \in T$.

Ký hiệu $\mathbb{C}$ là tập T cùng các phép toán đã nêu ra ở trên. Ta có kết quả sau:

Bổ đề 1.1.1. *Ánh xạ $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, a \mapsto (a,0)$, là một đơn ánh và nó thỏa mãn $\phi(a+a') = \phi(a) + \phi(a'), \phi(aa') = \phi(a)\phi(a')$ với mọi $a, a' \in \mathbb{R}$.*

Đồng nhất $(a,0) \in \mathbb{C}$ với $a \in \mathbb{R}$. Khi đó có thể viết $(a,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + bi$ với $i^2 = (-1,0) = -1$. Do đó i hay a hoặc $a + bi$ là bình đẳng trong $\mathbb{C}$.

Như vậy $\mathbb{C} = \{a + bi|a,b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ và trong $\mathbb{C}$ có kết quả dưới đây:

$$\begin{aligned}&a + bi = c + di \text{ khi và chỉ khi } a = c, b = d\\ &a + bi + c + di = a + c + (b+d)i\\ &(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i.\end{aligned}$$

Mỗi phần tử $z = a + bi \in \mathbb{C}$ được gọi là một *số phức* với *phần thực* a, ký hiệu $\Re z$, và *phần ảo* b, ký hiệu $\Im z$; còn i được gọi là *đơn vị ảo*. Số phức $a - bi$ được gọi là *số phức liên hợp* của $z = a + bi$ và được ký hiệu qua $\overline{z} = \overline{a + bi}$. Dễ dàng kiểm tra $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2, \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$ và gọi $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ là *môđun* của z. *Số đối* của $z' = c + di$ là $-z' = -c - di$ và hiệu $z - z' = (a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i$.
Xét mặt phẳng tọa độ (Oxy). Mỗi số phức $z = a + bi$ ta cho tương ứng với điểm $M(a; b)$. Tương ứng này là một song ánh

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, z = a + bi \mapsto M(a; b).$$

Khi đồng nhất $\mathbb{C}$ với (Oxy) qua việc đồng nhất z với M, thì mặt phẳng tọa độ với biểu diễn số phức như thế được gọi là *mặt phẳng phức* hay *mặt phẳng Gauss* để ghi công C. F. Gauss-người đầu tiên đưa ra biểu diễn.

Mệnh đề 1.1.2. *Tập $\mathbb{C}$ là một trường chứa trường $\mathbb{R}$ như một trường con.*

Chứng minh: Dễ dàng kiểm tra $\mathbb{C}$ là một vành giao hoán với đơn vị 1. Giả sử $z = a+bi \neq 0$. Khi đó $a^2+b^2 > 0$. Giả sử $z' = x+yi \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $zz' = 1$ hay $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0. \end{cases}$ Giải hệ được $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}, y = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}$.
Vậy $z' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2} i$ là nghịch đảo của z. Tóm lại $\mathbb{C}$ là một trường. Tương ứng $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$, là một tự đẳng cấu liên hợp. Đồng nhất $a \in \mathbb{R}$ với $a + 0i \in \mathbb{C}$ và có thể coi $\mathbb{R}$ là một trường con của $\mathbb{C}$ hay $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. $\square$

Chú ý rằng, nghịch đảo của $z \neq 0$ là $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ và $\dfrac{z'}{z} = z'z^{-1} = \dfrac{z'\overline{z}}{|z|^2}$.

Định nghĩa 1.1.3. Cho số phức $z \neq 0$. Giả sử M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Số đo (*rađian*) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox và tia cuối OM được gọi là một *Argument* của z và được ký hiệu qua $\mathrm{Arg}(z)$. Góc $\alpha = \angle xOM, -\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi$, được gọi là *argument* của z và được ký hiệu bởi $\arg z$. Argument của số phức 0 là không định nghĩa.

Chú ý rằng, nếu α là một argument của z thì mọi argument của z đều có dạng $\alpha + k.2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$. Với $z \neq 0$, ký hiệu $\alpha + k.2\pi$ là Argument của z. Ký hiệu $r = \sqrt{z\overline{z}}$. Khi đó số phức $z = a + bi$ có $a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$. Vậy khi $z \neq 0$ thì có thể biểu diễn $z = r\big(\cos\alpha + i\sin\alpha\big)$ và biểu diễn này được gọi là *dạng lượng giác* của z.

Mệnh đề 1.1.4. *Với số phức z_1, z_2 cùng biểu diễn $z_1 = r_1\big(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1\big)$, $z_2 = r_2\big(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2\big)$, $r_1, r_2 \geqslant 0$, ta luôn có*

(i) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$, $|\dfrac{z_1}{z_2}| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ *và* $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

(ii) $z_1z_2 = r_1r_2\big[\cos\big(\alpha_1 + \alpha_2\big) + i\sin\big(\alpha_1 + \alpha_2\big)\big]$

(iii) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\big[\cos\big(\alpha_1 - \alpha_2\big) + i\sin\big(\alpha_1 - \alpha_2\big)\big]$ *khi* $r > 0$.

Ví dụ 1.1.5. *Với* $a + bi = \big(x + iy\big)^n$ *có* $a^2 + b^2 = \big(x^2 + y^2\big)^n$.

Bài giải: Từ $a + bi = \big(x + iy\big)^n$ suy ra $a - bi = \big(x - iy\big)^n$. Như vậy $a^2 + b^2 = \big(x^2 + y^2\big)^n$. □

Mệnh đề 1.1.6. [Moivre] *Nếu $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ thì với mỗi số nguyên dương n có $z^n = r^n\big[\cos\big(n\alpha\big) + i\sin\big(n\alpha\big)\big]$.*

Hệ quả 1.1.7. *Căn bậc n của một số phức $z = r\big(\cos\alpha + i\sin\alpha\big) \neq 0$ là n giá trị khác nhau $z_k = r^{1/n}\Big(\cos\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}\Big)$ với $k = 1, 2, \ldots, n$.*

1.2 Tính đóng đại số của trường $\mathbb{C}$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng, mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có nghiệm trong $\mathbb{C}$. Đó chính là nội dung Định lý cơ bản của đại số. Người đầu tiên chứng minh định lý này là nhà toán học C. Gauss (1777-1855).

Định nghĩa 1.2.1. Trường K được gọi là một *trường đóng đại số* nếu mọi đa thức bậc dương thuôc $K[x]$ đều có nghiệm trong K.

Như vậy, trong $K[x]$ mọi đa thức bậc dương đều phân tích được thành tích các nhân tử tuyến tính khi K là một trường đóng đại số.

Bổ đề 1.2.2. *Mỗi đa thức bậc lẻ thuộc $\mathbb{R}[x]$ đều có ít nhất một nghiệm thực thuộc $\mathbb{R}$.*

Chứng minh: Giả sử $f(x) = a_0x^{2s+1} + a_1x^{2s} + \cdots + a_{2s}x + a_{2s+1} \in \mathbb{R}[x]$ với $a_0 \neq 0$. Dễ dàng thấy rằng $a_0f(x)$ sẽ tiến ra $+\infty$ khi $x \to +\infty$ và $a_0f(x)$ sẽ tiến ra $-\infty$ khi $x \to -\infty$. Từ đây suy ra sự tồn tại của các số thực $\alpha > 0$ và $\beta < 0$ thỏa mãn $a_0f(\alpha) > 0, a_0f(\beta) < 0$. Do vậy $a_0^2f(\alpha)f(\beta) < 0$ hay $f(\alpha)f(\beta) < 0$. Vì đa thức $f(x)$ là hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\alpha)f(\beta) < 0$ nên, theo Định lý Weierstrass, đa thức $f(x)$ có ít nhất một nghiệm thực thuộc (α, β). □

Bổ đề 1.2.3. *Mỗi đa thức bậc hai thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có hai nghiệm thuộc $\mathbb{C}$.*

Chứng minh: Trước tiên ta chỉ ra, với mỗi số phức z đều có hai số phức z_1, z_2 để $z_1^2 = z, z_2^2 = z$. Thật vậy, giả sử $z = a + bi \neq 0$ và giả sử $z_1 = x + yi$ với $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ để $z_1^2 = z$ hay $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$

Ta chỉ cần xét trường hợp $b \neq 0$ vì trường hợp $b = 0$ được xét tương tự. Vì $b \neq 0$ nên $x \neq 0$. Khi đó

$$\begin{cases} y = \dfrac{b}{2x} \\ 4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \neq 0 \\ y = \dfrac{b}{2x}. \end{cases}$$

Ta có $z_1 = x_1 + \dfrac{bi}{2x_1}$ và $z_2 = x_2 + \dfrac{bi}{2x_2}$ thỏa mãn $z_1^2 = z_2^2 = z$.
Theo lập luận ở trên, có hai số phức z_1 và z_2 để $z_1^2 = z_2^2 = b^2 - 4ac$. Khi đó nghiệm của phương trình là $\dfrac{-b + z_1}{2}$ và $\dfrac{-b + z_2}{2}$. □

Định lý 1.2.4. [d'Alembert-Gauss, Định lý cơ bản của đại số] *Mọi đa thức bậc dương thuộc $\mathbb{C}[x]$ đều có ít nhất một nghiệm thuộc $\mathbb{C}$.*

Hệ quả 1.2.5. *Mọi đa thức thuộc $\mathbb{C}[x]$ với bậc $n > 0$ đều có n nghiệm trong $\mathbb{C}$ và các đa thức bất khả quy trong $\mathbb{C}[x]$ là các đa thức bậc nhất.*

Bổ đề 1.2.6. *Cho* $f(x) \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$. $f(x)$ *là đa thức bất khả quy khi và chỉ khi hoặc* $f(x) = ax + b$ *với* $a \neq 0$ *hoặc* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *với* $a \neq 0$ *và* $b^2 - 4ac < 0$.

Chứng minh: Hiển nhiên, nếu $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$ hoặc $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và $b^2 - 4ac < 0$ thì $f(x)$ là bất khả quy Ta chứng minh điều ngược lại. Giả thiết $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ là bất khả quy với $\deg f(x) \geqslant 1$. Trường hợp $\deg f(x) = 1$ thì $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$. Xét trường hợp $\deg f(x) = 2$. Khi đó $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$. Nếu $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ và ta có $f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$: mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $b^2 - 4ac < 0$. Xét trường hợp $\deg f(x) > 2$. Vì $\mathbb{C}$ là trường đóng đại số nên $f(x) = 0$ có nghiệm $\alpha \in \mathbb{C}$ *theo Định lý 1.2.4* và như vậy nó còn có nghiệm $\overline{\alpha}$. Khi đó $f(x)$ có nhân tử $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) \in \mathbb{R}[x]$ hay $f(x)$ là khả quy : mâu thuẫn giả thiết. Tóm lại, nếu $f(x)$ là đa thức bất khả quy thì hoặc $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$ hoặc $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và $b^2 - 4ac < 0$. $\square$

Ví dụ 1.2.7. *Chứng minh rằng, với hai số phức* z_1 *và* z_2 *ta luôn có*

$$2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2.$$

Bài giải: Giả sử $A(z_1), B(z_2)$ và $C(z_1 + z_2)$. Vì tứ giác $OACB$ là hình bình hành nên $OC^2 + A^2 = 2OA^2 + 2OB^2$ hay $2[|z_1|^2 + |z_2|^2] = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2$. $\square$

Ví dụ 1.2.8. *Với hai số phức* z *và* z' *ta đặt* $u = \sqrt{zz'}$. *Chứng minh rằng* $|z| + |z'| = |\dfrac{z + z'}{2} - u| + |\dfrac{z + z'}{2} + u|$.

Bài giải: Vì $|\dfrac{z + z'}{2} - u| + |\dfrac{z + z'}{2} + u| = |\dfrac{(\sqrt{z} - \sqrt{z'})^2}{2}| + |\dfrac{(\sqrt{z} + \sqrt{z'})^2}{2}|$ nên khi đặt $z_1 = \sqrt{z}, z_2 = \sqrt{z'}$ ta sẽ phải chứng minh hệ thức sau đây:

$$2[|z_1|^2 + |z_2|^2] = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2.$$

Xét $A(z_1), B(z_2)$ và $C(z_1 + z_2)$. Vì tứ giác $OACB$ là hình bình hành nên $OC^2 + A^2 = 2OA^2 + 2OB^2$ hay $2[|z_1|^2 + |z_2|^2] = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2$. $\square$

Ví dụ 1.2.9. *Chứng minh rằng, với ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_3 có*

$$\begin{aligned}&2\Big|\frac{z_1+z_2}{2}-\sqrt{z_1z_2}\Big|+2\Big|\frac{z_1+z_3}{2}-\sqrt{z_1z_3}\Big|\\ =&\ \Big|\frac{z_2+z_3}{2}-\sqrt{z_2z_3}\Big|+2\Big|z_1+\frac{z_2+z_3}{4}-\sqrt{z_1z_2}-\sqrt{z_1z_3}+\frac{\sqrt{z_2z_3}}{2}\Big|.\end{aligned}$$

Bài giải: Đặt $u_j = \sqrt{z_j}$ với $j = 1, 2, 3$. Ta sẽ phải chứng minh hệ thức

$$|u_1-u_2|^2+|u_1-u_3|^2=\frac{|u_2-u_3|^2}{2}+2\Big|u_1-\frac{u_2+u_3}{2}\Big|^2.$$

Xét tam giác ABC với $A(u_1), B(u_2), C(u_3)$ và trung điểm $M\big(\frac{u_2+u_3}{2}\big)$ của cạnh BC. Vì $b^2 + c^2 = 2m_a^+\frac{a^2}{2}$ nên ta nhận được đồng nhất thức $|u_1-u_2|^2+|u_1-u_3|^2=\frac{|u_2-u_3|^2}{2}+2\Big|u_1-\frac{u_2+u_3}{2}\Big|^2$ và ta có điều cần chứng minh. □

Ví dụ 1.2.10. [Euler] *Với $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$ ta luôn có*

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)=u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2,$$

trong đó $\begin{cases}u_1=x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4\\ u_2=x_1y_2+x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3\\ u_3=x_1y_3-x_2y_4+x_3y_1+x_4y_2\\ u_4=x_1y_4+x_2y_3-x_3y_2+x_4y_1\end{cases}$ *và suy ra bất đẳng thức*

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2\geqslant(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2.$$

Chứng minh: Đặt $z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 + ix_4, z_3 = y_1 + iy_2$ và $z_4 = y_3 + iy_4$. Ta có thể biểu diễn $T = (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)$ $= (z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2})(z_3\overline{z_3} + z_4\overline{z_4}) = z_1z_3\overline{z_1z_3} + z_2z_3\overline{z_2z_3} + z_1z_4\overline{z_1z_4} + z_2z_4\overline{z_2z_4}$. Như vậy $T = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$. □

1.3 Định lý Euler về $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

Định lý 1.3.1. [Euler] *Với mọi số thực x ta có $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.*