

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ VÂN

PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANTINE
ĐỐI VỚI ĐA THỨC VÀ HÀM HỮU TỶ
TRÊN TRƯỜNG ĐÓNG ĐẠI SỐ,
ĐẶC TRƯNG KHÔNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ VÂN

PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANTINE
ĐỐI VỚI ĐA THỨC VÀ HÀM HỮU TỶ
TRÊN TRƯỜNG ĐÓNG ĐẠI SỐ,
ĐẶC TRƯNG KHÔNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

TS. VŨ HOÀI AN

Thái Nguyên, Năm 2014

Lời cảm ơn

Luận văn được hoàn thành tại Khoa sau đại học, Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của thầy giáo TS. Vũ Hoài An. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến thầy, người đã hướng dẫn giúp đỡ tôi trong suốt quá trình thực hiện luận văn. Nhân dịp này, tôi xin trân trọng cảm ơn ban lãnh đạo khoa Toán trường Đại học Khoa học, Khoa sau đại học - Đại học Thái Nguyên, các thầy cô giáo đã trang bị kiến thức, tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong thời gian học tập. Cảm ơn GS. TSKH. Hà Huy Khoái, GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường, PGS. TS. Lê Thị Thanh Nhân, GPS. TS. Đàm Văn Nhí. PGS. TS. Trịnh Thanh Hải đã có nhiều ý kiến quý báu để tác giả hoàn chỉnh luận văn.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp và các thành viên lớp Cao học Toán K6B đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên cổ vũ tôi để tôi có thể hoàn thành luận văn.

Tuy đã nỗ lực học tập, nghiên cứu và đã hết sức cố gắng song do thời gian và năng lực bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của quý thầy cô và các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 3 năm 2014

Học viên

Nguyễn Thị Vân

Mục lục

| | |
|--|-----------|
| Mục lục | 1 |
| Mở đầu | 3 |
| Bảng ký hiệu | 6 |
| 1 Phương trình Diophantine đối với hàm phân hình p-adic | 7 |
| 1.1 Tương tự giữa phương trình Diophantine đối với số nguyên và phương trình Diophantine đối với đa thức trên trường số phức | 8 |
| 1.1.1 Phương trình Diophantine đối với số nguyên trong toán học trung học cơ sở, trung học phổ thông | 8 |
| 1.1.2 Phương trình Diophantine đối với đa thức trên trường số phức | 21 |
| 1.2 Phương trình Diophantine đối với hàm phân hình p-adic | 22 |
| 1.2.1 Phương trình Fermat - Waring đối với hàm phân hình p-adic | 22 |
| 1.2.2 Phương trình $P(f) = Q(g)$ đối với hàm phân hình p-adic | 22 |
| 1.3 Hàm độ cao của hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc trưng không | 23 |
| 1.3.1 Hàm độ cao, hàm đếm của hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc trưng không | 23 |
| 1.3.2 Các định lý nhận giá trị của hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc trưng không | 24 |
| 2 Phương trình Diophantine đối với đa thức và hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc trưng không | 26 |

| | | |
|-------|---|----|
| 2.1 | Phương trình kiểu Fermat - Waring đối với đa thức và hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc trưng không | 26 |
| 2.2 | Phương trình $P(f) = Q(g)$ đối với đa thức và hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc trưng không | 30 |
| 2.2.1 | Phương trình hàm $P(f) = Q(g)$ cho hàm hữu tỷ trên \mathbb{K} . | 30 |
| 2.2.2 | Đa thức duy nhất cho các hàm hữu tỷ | 36 |
| | Kết luận | 41 |
| | Tài liệu tham khảo | 42 |

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Sự phát triển của số học, đặc biệt là trong những thập kỷ gần đây, chịu ảnh hưởng rất lớn của sự tương tự giữa số nguyên và đa thức. Nói cách khác, khi có giả thiết nào đó chưa chứng minh được đối với số nguyên, người ta cố gắng chứng minh sự kiện tương tự cho đa thức. Điều đó thường dễ làm hơn, có lẽ nguyên nhân chủ yếu là vì, đối với đa thức, ta có phép tính đạo hàm, trong khi một khái niệm tương tự chưa có đối với số nguyên. Ngoài ra, còn có hướng nghiên cứu theo tình huống ngược lại: Từ các kết quả đối với đa thức, người ta cố gắng chứng minh sự kiện tương tự cho các số nguyên.

Phương trình Diophantine là vấn đề kinh điển và rất khó của số học. Trong toán học phổ thông, phương trình Diophantine đối với số nguyên là chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán, cũng thường xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi toán, báo Toán học và tuổi trẻ, các tài liệu toán học nâng cao dành cho học sinh phổ thông, giáo viên phổ thông.

Trong toán học cao cấp, ở [3], [7], [8], [9] đã có sự tương tự giữa phương trình Diophantine đối với các số nguyên cho hàm phân hình phức và p -adic. Công cụ sử dụng ở đó là lý thuyết phân bố giá trị phức và p -adic. Theo hướng nghiên cứu này, chúng tôi xem xét vấn đề:

Phương trình Diophantine đối với đa thức và hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc trưng không.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Vấn đề 1: Tổng hợp và trình bày kiến thức về phương trình Diophantine đối với số nguyên, đối với đa thức trên trường số phức.

Vấn đề 2: Trình bày tổng quan về phương trình Diophantine đối với hàm phân hình p -adic.

Vấn đề 3: Tổng hợp, xem xét và trình bày áp dụng của hai Định lý chính đối với hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc trưng không vào **phương**

trình Diophantine đối với đa thức và hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc trưng không. Cụ thể là:

Xét các phương trình Diophantine sau đây cho đa thức và hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc trưng không:

$$x^n + y^n = 1; \quad x^n + y^n + z^n = 0; \quad x^n + y^m = 1; \quad x^n + y^m + z^p = 0;$$

$$P(f) = Q(g),$$

với P, Q là các đa thức và f, g là hàm hữu tỷ.

3. Kết quả nghiên cứu

Luận văn tổng hợp trình bày về phương trình Diophantine đối với số nguyên, đối với đa thức trên trường số phức. Trình bày tổng quan về phương trình Diophantine đối với hàm phân hình p-adic. Tổng hợp, xem xét và trình bày áp dụng của hai Định lý chính đối với hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc trưng không vào phương trình Diophantine đối với đa thức và hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc trưng không.

Luận văn là tài liệu tham khảo có ích cho giáo viên toán trung học phổ thông, học viên cao học chuyên ngành phương pháp toán sơ cấp.

Luận văn tương tự các kết quả về phương trình hàm trong [8] và trình bày các kết quả trong [1]. Cụ thể là:

Định lý 2.1.1, Định lý 2.1.2, Định lý 2.1.4 là tương tự các Định lý 2.30, Định lý 2.32 và Định lý 2.33 ở trong [8].

Trình bày các kết quả trong [1] qua các Định lý 2.2.1, Định lý 2.2.2, 2.2.4, 2.2.7 đã được đưa ra trong [1].

4. Bố cục luận văn

Luận văn được chia làm hai chương cùng với phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1. Trong chương này chúng tôi xem xét Vấn đề 1. Mục tiêu là tổng hợp và trình bày các nội dung về phương trình Diophantine đối với số

nguyên và đa thức trên trường số phức, nhắc lại các kết quả về vấn đề nhận giá trị của hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc trưng không.

Chương 2. Tổng hợp, xem xét và trình bày áp dụng của hai định lý chính đối với hàm hữu tỷ, trên trường đóng đại số, đặc trưng không vào phương trình Diophantine đối với đa thức và hàm hữu tỷ trên trường đóng đại số, đặc trưng không.

Học viên

Nguyễn Thị Vân

Bảng ký hiệu

| | |
|--------------|-------------------------------------|
| \mathbb{K} | Trường đóng đại số, đặc trưng không |
| f | Hàm hữu tỷ |
| $n(f, a)$ | Hàm đếm của f tại điểm a |
| T_f | Hàm đặc trưng của f |

Chương 1

Phương trình Diophantine đối với hàm phân hình p-adic

Trong [3], Hà Huy Khoái - Phạm Huy Điển đã đề cập đến vấn đề: sự tương tự giữa số nguyên và đa thức.

Trước hết, ta thấy rõ, giữa tập hợp các số nguyên và tập các đa thức có những tính chất giống nhau sau đây:

- Các quy tắc cộng, trừ, nhân, chia hoàn toàn như nhau cho cả hai tập hợp.
- Nếu đối với số nguyên ta có các số nguyên tố, thì đối với đa thức ta có đa thức bất khả quy.
- Đối với 2 số nguyên cũng như đối với 2 đa thức thì có thể định nghĩa ƯCLN. Hơn nữa, trong cả 2 trường hợp, ƯCLN này tìm được bằng thuật toán Euclide.
- Mỗi số nguyên có thể phân tích thành các thừa số nguyên tố, mỗi đa thức có thể phân tích thành tích các đa thức bất khả quy.
- Mỗi số nguyên tố có giá trị tuyệt đối của nó, cũng như mỗi đa thức khác không đều có bậc.

Chúng ta có thể kéo dài bản danh sách này. Ở đây chúng tôi đi vào một vài sự kiện tương tự khó thấy hơn. Ta để ý đến sự tương tự giữa phân tích ra thừa số nguyên tố và phân tích bất khả quy. Nếu giả thiết \mathbb{K} là trường đóng đại số