ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

––––––––––––

NGUYỄN VĂN TUẤN

BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN VĂN TUẤN

BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số : 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2014

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Bất đẳng thức tích phân là một phần quan trọng trong tích phân có nhiều ứng dụng không những chỉ trong toán học mà còn trong các lĩnh vực khác. Một số bất đẳng thức tích phân kinh điển phải kể đến là Bất đẳng thức Bunhiacovski; Bất đẳng thức Chebyshev; Bất đẳng thức Young; Bất đẳng thức Jensen; Bất đẳng thức Holder; Bất đẳng thức Minkowski; Bất đẳng thức Diaz; Bất đẳng thức Polya ... Bài toán bất đẳng thức tích phân là một bài toán khó thường xuất hiện trong các bài toán thi học sinh giỏi, trong các kỳ thi Olympic toán trong và ngoài nước. Luận văn này nhằm giới thiệu và chứng minh chi tiết một số bất đẳng thức tích phân cổ điển, một số bất đẳng thức tích phân mới được khám phá, đưa ra một hệ thống những ví dụ được trích dẫn từ những tài liệu tham khảo cũng như sáng tạo mới về bất đẳng thức tích phân. Ngoài ra đề tài còn để cập đến một số ứng dụng của bất đẳng thức tích phân, bao gồm: Đưa ra một số ứng dụng trong bài toán giới hạn, giải phương trình, chứng minh bất đẳng thức đại số.

Ngoài phần mở đầu, phần kết luận, luận văn gồm 2 chương:

Chương 1. Kiến thức cơ bản. Chương này trình bày các bất đẳng thức cơ bản của toán học như Bất đẳng thức AM - GM, Bất đẳng thức Bunhiacovski, Bất đẳng thức Chebyshev, ..., cùng với các định lý toán học rất quan trọng trong giải tích như Định lý Lagrange, Định lý Roll. Ngoài ra khái niệm, định nghĩa tích phân và các tính chất của tích phân là kiến thức trọng tâm của chương này. Đặc biệt ta quan tâm nhiều đến các tính chất về bất đẳng thức tích phân cũng như các định lý về đẳng thức tích phân như định lý về giá trị trung bình trong tích phân.

Chương 2. Bất đẳng thức tích phân và ứng dụng. Chương này trình bày các bài toán về chứng minh bất đẳng thức tích phân thông qua việc đánh giá hàm số dưới dấu tích phân, cũng như dùng các bất đẳng thức tích phân cổ điển để chứng minh. Trong chương này còn nêu một loạt các bài tập chứng minh bất đẳng thức tích phân dưới dạng phức tạp mà việc giải quyết chúng là không hề đơn giản. Một vấn đề nữa được nêu trong chương là những ứng dụng của bất đẳng thức tích phân trong các bài toán số học, đại số cũng như trong giải tích .

Sau một thời gian nghiên cứu, luận văn thạc sĩ của tôi đã hoàn thành với tên đề tài "Bất đẳng thức tích phân và ứng dụng". Những kết quả ban đầu mà tôi thu được là nhờ sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của TS. Trần Nguyên An, Trường Đại học Sư Phạm - Đại học Thái Nguyên. Nhờ thầy tôi đã tiếp cận và nắm bắt được một số vấn đề mới mẻ trong công tác nghiên cứu khoa học. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với sự quan tâm, động viên và hướng dẫn của thầy. Tác giả xin cảm ơn tới các thầy cô trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, phòng Đào tạo Trường Đại học Khoa học. Đồng thời tác giả xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học toán K6A, trường Đại học Khoa học đã động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn này.

Tác giả xin cảm ơn tới Sở GD - ĐT tỉnh Tuyên Quang, Ban Giám hiệu, các đồng nghiệp Trường THPT Sơn Dương đã tạo mọi điều kiện giúp đỡ tác giả trong thời gian học tập và hoàn thành luận văn.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Một số bất đẳng thức cổ điển và định lý giá trị trung bình

Định lý 1.1.1 (Bất đẳng thức AM - GM)**.** *Với mọi số thực dương* $a_1, a_2, ..., a_n$ *ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Định lý 1.1.2 (Bất đẳng thức Bunhiacovski)**.** *Với 2 dãy số thực tùy ý* $a_1, a_2, ..., a_n$ *và* $b_1, b_2, ..., b_n$ *ta luôn có bất đẳng thức*

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \geq \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n\right)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1, a_2, ..., a_n$ *và* $b_1, b_2, ..., b_n$ *là 2 bộ tỉ lệ, tức là tồn tại số k để* $a_i = kb_i$*, với mọi* $i \in \overline{1, n}$.

Định lý 1.1.3 (Bất đẳng thức Holder)**.** *Với m dãy số thực dương* $(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}), ..., (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})$ *ta có*

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) \geq \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt[m]{\prod_{i=1}^{m} a_{ij}}\right)^m$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi m dãy số đó tương ứng tỉ lệ. Bất đẳng thức Bunhiacovski là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Holder với m=2.

Định lý 1.1.4. *(Bất đẳng thức Chebyshev).*
(i) Với 2 dãy số thực đơn điệu tăng $a_1, a_2, ..., a_n$ *và* $b_1, b_2, ..., b_n$ *ta có*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \geq \frac{1}{n}\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)\left(b_1 + b_2 + ... + b_n\right).$$

(ii) Với 2 dãy số thực đơn điệu giảm $a_1, a_2, ..., a_n$ *và* $b_1, b_2, ..., b_n$ *ta có*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \leq \frac{1}{n}\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)\left(b_1 + b_2 + ... + b_n\right).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$ *và* $b_1 = b_2 = ... = b_n$.

Định lý 1.1.5 (Bất đẳng thức Jensen's)**.** *Nếu* f *là hàm lồi trên khoảng* $K \subseteq \mathbb{R}$ *thì mọi* $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ *ta đều có*

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \geq nf(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Định lý 1.1.6 (Bất đẳng thức Young)**.** *Cho p, q thỏa mãn điều kiện*

$$p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Chứng minh rằng, mọi a, b dương, ta đều có

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Định lý 1.1.7 (Định lý Lagrange)**.** *Nếu* $f(x)$ *liên tục và khả vi trên đoạn* $[a, b]$ *thì tồn tại* $c \in (a, b)$ *sao cho*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Định lý 1.1.8 (Định lý Roll)**.** *Nếu* $f(x)$ *liên tục trên* $[a, b]$*, khả vi trên* $(a, b), f(a) = f(b)$ *thì tồn tại* $c \in (a, b)$ *sao cho* $f'(c) = 0$.

1.2 Tích phân

1.2.1 Định nghĩa tích phân

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[a, b]$. Chia đoạn $[a, b]$ thành những đoạn nhỏ bởi các điểm

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Mỗi phép chia như vậy gọi là *một phép phân hoạch* đoạn $[a, b]$ và được kí hiệu bởi chữ π, các điểm $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ gọi là các điểm chia. Trong mỗi đoạn $[x_{k-1}, x_k]$ ta lấy một điểm bất kì $\xi_k (x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k)$ rồi lập tổng:

$$\sigma_\pi = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{1.2.1}$$

Tổng (1.2.1) gọi là tổng tích phân của hàm số $f(x)$ ứng với phép phân hoạch π. Rõ ràng giá trị của tổng này phụ thuộc vào phép phân hoạch và cách lấy điểm ξ_k. Ta kí hiệu $\mathrm{d}(\pi)$ là số lớn nhất trong độ dài các đoạn $[x_{k-1}, x_k]$, trong phép phân hoạch π, tức là:

$$d(\pi) = \underset{k}{max}\,(x_k - x_{k-1}). \tag{1.2.2}$$

Ta nói rằng tổng σ_π dần tới giới hạn I khi $d(\pi) \to 0$ nếu: Với mỗi số $\epsilon > 0$ cho trước nhỏ tùy ý, bao giờ cũng tồn tại số $\delta > 0$ sao cho mọi phép phân hoạch π mà $d(\pi) < \delta$ và với mọi cách chọn các điểm ξ_k ta đều có :

$$|\sigma_\pi - I| = \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - I \right| < \varepsilon$$

và ta kí hiệu:

$$I = \lim_{d(\pi)\to 0} \sigma_\pi = \lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Nếu tồn tại giới hạn

$$I = \lim_{d(\pi)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

thì giới hạn đó được gọi là tích phân xác định của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$ và ta kí hiệu là:

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Khi đó hàm số $f(x)$ được gọi là khả tích trên đoạn $[a,b]$ và ta gọi $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân; $f(x)dx$ gọi là biểu thức dưới dấu tích phân; các số a, b gọi là cận của tích phân ; b là cận trên, a là cận dưới.

1.2.2 Các tính chất

Tính chất 1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

Tính chất 2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

Tính chất 3. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx, k \in \mathbb{R}.$

Tính chất 4. $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$

Tính chất 5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \forall c \in [a,b]\,.$

Tính chất 6. Nếu $f(x) \geq 0$ trên đoạn $[a,b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$

Tính chất 7. Nếu $f(x) \geq g(x)$ và $f(x), g(x)$ khả tích trên đoạn $[a,b]$ thì

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Tính chất 8. Nếu $m \leq f(x) \leq M$ và $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a,b]$ thì

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

với m, M là các hằng số

Tính chất 9. Nếu $f(x)$ khả tích trên đoạn $[a,b]$ thì $|f(x)|$ cũng khả tích trên đoạn đó và

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Tính chất 10 (Định lý giá trị trung bình thứ nhất). Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b], g(x)$ không đổi dấu trên (a, b). Ký hiệu $m = \underset{x\in[a,b]}{inf} f(x), M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ thì tồn tại một số μ với $m \leq \mu \leq M$ sao cho:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Hơn nữa nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ thì tồn tại 1 số $c \in [a, b]$ sao cho:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Tính chất 11 (Định lý giá trị trung bình thứ hai).
(i) Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b], g(x)$ là hàm đơn điệu trên (a, b) thì tồn tại $c \in (a, b)$ để

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^c f(x)dx + g(b) \int_c^b f(x)dx.$$

(ii) Nếu $g(x)$ là hàm đơn điệu giảm, không âm trong khoảng (a, b) thì:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^c f(x)dx, c \in [a, b]\,.$$

(iii) Nếu $g(x)$ là hàm đơn điệu tăng, không âm trong khoảng (a, b) thì:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_a^c f(x)dx, c \in [a, b]\,.$$