ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ DUYÊN

VỀ BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VỚI TOÁN TỬ GIẢ ĐƠN ĐIỆU MẠNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ DUYÊN

VỀ BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VỚI TOÁN TỬ GIẢ ĐƠN ĐIỆU MẠNH

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên - Năm 2014

LỜI CẢM ƠN

Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn, tôi đã nhận được sự dạy bảo tận tình của các thầy cô giáo ở trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên. Đặc biệt là sự chỉ bảo, hướng dẫn trực tiếp của GS. TSKH. Lê Dũng Mưu. Qua đây tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, tới các thầy cô giáo và các bạn đồng nghiệp đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua.

Tuy có nhiều cố gắng, song thời gian và năng lực của bản thân có hạn nên luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô cùng toàn thể bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 06 năm 2014

Tác giả

Phạm Thị Duyên

Mục lục

Các kí hiệu và danh mục các từ viết tắt

- $A\bigcup B$: Hợp của hai tập hợp A và B.
- $A\bigcap B$:Giao của hai tập hợp A và B.
- $\mathbb{R}$: Tập số thực.
- $[a;b]$: Đoạn đóng của tập hợp số thực với các đầu mút a,b và $a<b$.
- $(a;b)$: Khoảng mở của tập hợp số thực với các đầu mút a,b và $a<b$.
- $\forall$: Với mọi.
- $\exists$: Tồn tại
- H: Không gian Hilbert.
- $\langle,\rangle$: Tích vô hướng.
- $\|.\|$: Chuẩn.
- VIP: Bài toán bất đẳng thức biến phân.
- $SOL-VIP$: Tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân.

MỞ ĐẦU

Bài toán Bất đẳng thức biến phân được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1966 bởi Hartman và Stampachia. Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều và các ứng dụng thực tiễn của nó thì được giới thiệu trong cuốn sách "An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications" của Kinderlehrer D. và Stampachia G., xuất bản năm 1980 và trong cuốn sách "Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free Boundary Problems" của Baiocci C. và Capelo A., xuất bản năm 1984.

Năm 1979 Michael J. Smith đưa ra bài toán cân bằng mạng giao thông và đến năm 1980 Defermos đã chỉ ra rằng điểm cân bằng của bài toán này là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân. Từ đó bài toán bất đẳng thức biến phân được phát triển trở thành một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu và giải các bài toán cân bằng trong kinh tế tài chính, vận tải, lí thuyết trò chơi và nhiều bài toán khác. Trong bài toán bất đẳng thức biến phân thì lớp bài toán bất đẳng thức biến phân với toán tử giả đơn điệu mạnh có một vị trí hết sức quan trọng.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và các tài liệu tham khảo, các kết quả nghiên cứu trong bản luận văn được trình bày thành hai chương với tiêu đề:

Chương 1: Bài toán bất đẳng thức biến phân.

Chương 2: Một số phương pháp chiếu giải bài toán bất đẳng thức biến phân với toán tử giả đơn điệu mạnh.

Nội dung chính của các chương là:

Chương 1: Một số kiến thức cơ sở về không gian Hilbert thực, giải tích lồi, các khái niệm về toán tử đơn điệu. Sau đó, là phát biểu bài toán bất đẳng thức biến phân, sự tồn tại nghiệm, trong đó đề cập đến các bài toán liên quan, các mô hình thực tế.

Chương 2: Trình bày một số phương pháp chiếu để giải bài toán bất đẳng thức biến phân với toán tử giả đơn điệu mạnh. Cụ thể là trình bày ba thuật toán:

+ Thuật toán chiếu với độ dài bước có thể thay đổi trong trục số dương.

+ Thuật toán chiếu với độ dài bước thay đổi theo các hằng số cho trước liên quan đến hệ số giả đơn điệu mạnh và hằng số Lipschitz của ánh xạ giá.

+ Thuật toán chiếu với độ dài bước thay đổi nhưng không đòi hỏi biết hệ số giả đơn điệu mạnh và hằng số Lipschitz của ánh xạ giá.

Chương 1

Bài toán bất đẳng thức biến phân.

Nội dung chính của chương bao gồm: Một số kiến thức cơ sở về không gian Hilbert thực, giải tích lồi, các khái niệm về toán tử đơn điệu. Tiếp theo là phát biểu bài toán bất đẳng thức biến phân, sự tồn tại nghiệm và một số bài toán ví dụ có liên quan. Các kiến thức trong chương này lấy từ tài liệu [1], [2], [3], [4]

1.1 Toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert.

1.1.1 Không gian Hilbert.

Định nghĩa 1.1. *Cho H là một không gian tuyến tính thực. Tích vô hướng xác định trên H là một ánh xạ được xác định như sau:*

$$\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \to \langle x, y \rangle$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

i). $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in X.$

ii). $\langle x + y, z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in X.$

iii). $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall x, y \in X.$

iv).$\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in X, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

$\langle x, y \rangle$ *được gọi là tích vô hướng của hai vec tơ x và y.*

Nếu H là không gian tuyến tính định chuẩn với $\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ với mọi $x \in H$, thì H được gọi là không gian tiền Hilbert (hay còn gọi là không gian Unita).
Nếu không gian tiền Hilbert là đầy đủ thì nó được gọi là không gian Hilbert.

Trong luận văn này ta thống nhất kí hiệu H là một không gian Hilbert thực và ta chủ yếu làm việc trên không gian Ơcơlit thực $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 1.2.
1) Lấy $H = \mathbb{R}^n$ với $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\quad y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in H$ và biểu thức $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ xác định một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^n$.
2) Lấy $H = C_{[0,1]}$ là không gian các hàm liên tục trên [0,1] nhận giá trị thực với $x, y \in H$ biểu thức

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$$

xác định một tích vô hướng trên $C_{[0,1]}$. Khi đó không gian này là một không gian tiền Hilbert và thường kí hiệu là $C^L_{[0,1]}$.
3) Cho (Ω, β, μ) là không gian độ đo kí hiệu:

$$L^2(\Omega) = f : \Omega \to C : \int\limits_{\Omega} |f(x)^2| d\mu < \infty$$

với tích vô hướng $\langle f, g\rangle = \int\limits_{\Omega} f(x)g(x)d\mu, L^2(\Omega)$ là một không gian Hilbert H.

Định lý 1.3. *Cho H là một không gian tiền Hilbert, với mọi $x, y \in H$ ta luôn có bất đẳng thức sau :*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Bất đẳng thức này gọi là bất đẳng thức Schwarz.

Định lý 1.4.
Cho H là một không gian Hilbert khi đó $\langle , \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ là một hàm liên tục.

Định lý 1.5 (Đẳng thức hình bình hành).
Với mọi x,y trong không gian tiền Hilbert H ta có:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

1.1.2 Tập lồi, hàm lồi

Định nghĩa 1.6. *Một tập $C \subseteq H$ được gọi là một tập lồi nếu*

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Định nghĩa 1.7. *Một tập hợp $C \subseteq H$ được gọi là nón nếu:*

$$\forall x \in C, \forall \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in C.$$

Một nón được gọi là nón lồi nếu nó đồng thời là tập lồi. Như vậy, một tập lồi C là nón lồi khi và chỉ khi nó có tính chất sau:
i) $\lambda C \subseteq C, \forall \lambda > 0.$
ii) $C + C \subseteq C.$

Tập $C \subseteq H$ dưới đây ta luôn giả thiết C là tập lồi (nếu không giải thích gì thêm).

Định nghĩa 1.8. *Cho C là tập lồi khác rỗng trong H và điểm $\overline{x} \in C$, nón pháp tuyến của C tại $\overline{x}$ là một tập được kí hiệu và kí hiệu như sau*

$$N(\overline{x}/C) = \{x^* \in H^* : \langle x^*, x - x^* \rangle \leq 0, \forall x \in C\}.$$

Định nghĩa 1.9. *Cho hàm $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Khi đó hàm f được gọi là*
i) lồi trên C nếu:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall x, y \in C, \lambda \in [0, 1].$$

ii) lồi chặt trên C nếu:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall x, y \in C, x \neq y, \lambda \in (0, 1).$$

iii) lồi mạnh với hệ số $\beta > 0$ trên C nếu với mọi $x, y \in C, \lambda \in (0, 1)$ ta có

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \lambda(1 - \lambda)\beta \| x - y \|^2 .$$