ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

PHẠM THỊ VI

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM CHUYỂN ĐỔI CÁC ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ VI

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM CHUYỂN ĐỔI CÁC ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học
PGS.TS. ĐÀM VĂN NHỈ

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

MỞ ĐẦU

Trong chương trình Toán học phổ thông, chuyên đề phương trình hàm đóng một vai trò đặc biệt. Đó là dạng chuyên đề cần thiết trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi Toán, nhưng lại chưa được dạy và học một cách cơ bản và hệ thống ở bậc đại học. Vì vậy việc tiếp cận tới lý thuyết cũng như thực hành phương pháp giải phương trình và bất phương trình hàm còn có những bất cập, cần được chú trọng nhiều hơn.

Phương trình và bất phương trình hàm luôn là sự hấp dẫn đối với giáo viên và học sinh vì nó thường xuất hiện trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, olympic Toán khu vực và quốc tế.

Mục tiêu của luận văn "Phương trình và bất phương trình hàm chuyển đổi các đại lượng trung bình" nhằm trình bày một số vấn đề cơ bản của phương trình và bất phương trình hàm với cặp biến tự do liên quan đến các đại lượng trung bình cơ bản của cặp số dương là đại lượng trung bình cộng, trung bình nhân, trung bình điều hòa và trung bình bình phương. Từ đó, tạo ra một đề tài phù hợp cho việc giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi cấp trung học phổ thông.

Luận văn gồm phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo và 3 chương.
Chương 1 trình bày về khái niệm phương trình hàm, mối liên hệ cơ bản giữa một số đại lượng trung bình và các đặc trưng hàm với cặp biến tự do tương ứng, phương trình hàm Cauchy và phương trình hàm Jensen.
Chương 2 trình bày một số dạng phương trình hàm chuyển đổi các đại lượng trung bình cơ bản một ẩn hàm và song ẩn hàm.
Chương 3 trình bày một số một dạng bất phương trình hàm chuyển đổi

các đại lượng trung bình cơ bản trong lớp các hàm số liên tục.

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của PGS.TS Đàm Văn Nhỉ. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đến thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu đã giúp tôi hoàn thành tiểu luận về *Phương trình hàm chuyển đổi các đại lượng trung bình* để từ đó tôi có ý tưởng phát triển nó thành luận văn này.

Tôi xin cảm ơn quý thầy, cô giảng dạy lớp cao học khóa 6 $(2012-2014)$ đã mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong khoa học và cuộc sống. Cuối cùng tôi xin trân trọng cảm ơn trường Đại học Thái Nguyên - Đại học Khoa Học đã tạo điều kiện cho tôi được học tập trong môi trường tốt nhất.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy, cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn !

CHƯƠNG 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1. Định nghĩa và phân loại phương trình hàm

Trong mục này trình bày lại một vài khái niệm cơ bản đã được giới thiệu trong bài báo của Kuczma [12] (xem [1]-[2]) về phương trình hàm. Trước khi định nghĩa phương trình hàm chúng ta nhắc lại khái niệm *từ*.

Định nghĩa 1.1. Khái niệm *từ* được định nghĩa như sau đây:

(1) Các biến độc lập được gọi là các *từ*.

(2) Nếu $t_1, \cdots, t_p$ là các *từ* và $f(x_1, \cdots, x_p)$ là một hàm p biến thì $f(t_1, \cdots, t_p)$ cũng là một *từ*.

(3) Không tồn tại các loại *từ* khác.

Sau khi có khái niệm *từ*, Phương trình hàm được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.2. *Phương trình hàm* là một phương trình dạng $t_1 = t_2$ giữa hai *từ* t_1, t_2, và hai *từ* đó phải chứa tối thiểu một hàm chưa biết và một số hữu hạn các biến số độc lập. Phương trình $t_1 = t_2$ sẽ phải thỏa mãn đối với tất cả các giá trị nhận được của các biến thuộc một tập xác định nào đấy. Nghiệm của phương trình hàm có thể phụ thuộc hoàn toàn vào tập nào đó.

Như vậy, một phương trình hàm được hiểu nôm na như những bài toán xác định những hàm số $f(x)$ thỏa mãn một số tính chất $T_1, \ldots, T_n$ nào đó. *Giải phương trình hàm* tức là tìm tất cả những hàm $f(x)$ thỏa mãn tất cả những tính chất $T_1, \ldots, T_n$. Khi giải phương trình hàm, với mỗi tính chất T_k ta tìm cách tiến dần đến hàm số cần tìm. Với hàm số tìm được ta kiểm tra lại xem nó có thỏa mãn tất cả những tính chất T_k hay không? Thường giải phương trình hàm được đưa về giải một hệ phương trình hay một dãy

truy hồi. Từ những kết quả đã đạt được về đa thức hoặc hàm liên tục ta có thể dễ dàng giải được bài toán. Chúng tôi chỉ giới thiệu một vài dạng cơ bản về phương trình hàm.
Một số hàm sau thường được sử dụng trong một vài bài toán về phương trình hàm:

(i) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ và $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(ii) $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$.

Định nghĩa 1.3. Phương trình hàm trong đó mọi hàm chưa biết đều là những hàm một biến được gọi là *phương trình hàm thông thường*. Phương trình hàm trong đó ít nhất một trong các hàm chưa biết là hàm nhiều biến được gọi là *phương trình hàm riêng*.
W. Maier còn đưa ra khái niệm *hạng* của phương trình trong bài báo của mình:

Định nghĩa 1.4. Số biến độc lập xuất hiện trong phương trình hàm được gọi là *hạng* của phương trình ấy.

Phân loại phương trình hàm

Vấn đề phân loại phương trình hàm là rất khó và hiện nay vẫn chưa được giải quyết thỏa đáng. J. Aczel trong công trình của mình ông đã tuân theo các bước sau: một hoặc nhiều hàm ẩn một hoặc nhiều biến - tất cả bốn loại. Tất nhiên, việc phân loại là rất khó; cho dù là có ích.

Định nghĩa 1.5. Phương trình hàm trong đó mọi hàm ẩn là hàm một biến được gọi là phương trình hàm đơn (một) biến (thông thường). Phương trình hàm trong đó ít nhất một trong các hàm ẩn là hàm một biến được gọi là phương trình hàm riêng. Lưu ý rằng hàm riêng có thể hoàn toàn được xác định bằng phương trình hàm đơn biến, ngược với phương pháp trong phương trình vi phân. Mệnh đề về phân loại phương trình hàm thông thường được nêu trong tài liệu của Kuczma.

Định nghĩa 1.6. Số biến độc lập xuất hiện trong phương trình hàm được gọi là bậc của phương trình này.

Một vài hàm đặc biệt

J. Aczel đã đưa ra các phương pháp tổng quát về giải phương trình hàm các cấp, ví dụ:

$$\varphi(x+y) = F[\varphi(x), \varphi(y)], \tag{1.1}$$

$$\varphi\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = F[\varphi(x), \varphi(y)] \tag{1.2}$$

$$\varphi(ax+by+c) = F[\varphi(x), \varphi(y)], \tag{1.3}$$

$$G[\varphi(x+y), \varphi(x-y), \varphi(x), \varphi(y), x, y] = 0 \tag{1.4}$$

Ông cũng đưa ra các tiêu chí về sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm. Kể từ đó, các phương pháp tổng quát đã được J. Aczel và các học trò của ông tìm ra.

Trong luận văn này, ta xét bốn đại lượng trung bình cơ bản của các đối số (xem [2]):

1. Trung bình cộng các đối số $\dfrac{x+y}{2}$; $x, y \in \mathbb{R}$.
2. Trung bình nhân các đối số $\sqrt{xy}$; $x, y \in \mathbb{R}^+$.
3. Trung bình điều hòa các đối số $\dfrac{2xy}{x+y}$; $x, y \in \mathbb{R}^+$.
4. Trung bình bình phương các đối số $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

và các đại lượng trung bình của các hàm số

1. Trung bình cộng các hàm số $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$; $f(x), f(y) \in \mathbb{R}$.
2. Trung bình nhân các hàm số $\sqrt{f(x)f(y)}$; $f(x), f(y) \in \mathbb{R}^+$.
3. Trung bình điều hòa các hàm số $\dfrac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$; $f(x), f(y) \in \mathbb{R}^+$.
4. Trung bình bình phương các hàm số $\sqrt{\frac{[f(x)]^2+[f(y)]^2}{2}}$, $f(x), f(y) \in \mathbb{R}$.

và xét các bài toán xác định hàm số chuyển đổi các đại lượng từ trung bình của các đối số sang các đại lượng trung bình của các hàm số.

1.2. Đặc trưng hàm của một số hàm số sơ cấp

Để mô tả bức tranh mang tính định hướng, gợi ý và dự đoán công thức nghiệm của các bài toán liên quan, chúng ta xét một vài tính chất tiêu biểu của một số dạng hàm số quen biết.

- Hàm tuyến tính $f(x) = ax$ $(a \neq 0)$ có tính chất

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- Hàm bậc nhất $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0, \ b \neq 0)$ có tính chất

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

.

- Hàm lũy thừa $f(x) = |x|^k$, có tính chất

$$f(xy) = f(x).f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Hàm mũ $f(x) = a^x, (a > 0, a \neq 1)$ có tính chất

$$f(x+y) = f(x).f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$