ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHAN DUY THANH

PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN KIỂU TÍCH CHẬP FOURIER COSINE VỚI HÀM TRỌNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên – 2014

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu http://www.lrc-tnu.edu.vn/

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHAN DUY THANH

PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN KIỂU TÍCH CHẬP FOURIER COSINE VỚI HÀM TRỌNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS Nguyễn Minh Khoa

Thái Nguyên – 2014

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu http://www.lrc-tnu.edu.vn/

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu do tôi tự hoàn thành. Các kết quả chính của luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trên bất kỳ một tạp chí nào.

Tác giả

Phan Duy Thanh

LỜI CẢM ƠN

Trong quá trình học Cao học và viết Luận văn tốt nghiệp, tác giả đã nhận được nhiều sự ủng hộ của Phòng giáo dục và đào tạo huyện Tam Nông – Phú Thọ, lãnh đạo và đồng nghiệp trường THCS Dị Nậu, sự giúp đỡ quý báu của trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên. Tác giả còn nhận được sự chia sẻ, động viên của các bạn đồng nghiệp và người thân.

Trong quá trình thực hiện Luận văn thạc sĩ Toán học, tác giả đã nhận được sự hướng dẫn trực tiếp của TS. Nguyễn Minh Khoa về chuyên môn. Thầy luôn nhiệt tình, tận tâm chỉ bảo, truyền đạt cho tác giả nhiều kiến thức và cung cấp nhiều tài liệu quý báu. Thầy đã chỉ dẫn cho tác giả trình bày những kiến thức thu được qua học tập và ngiên cứu một cách có hệ thống trong luận văn này.

Tác giả xin chân thành cảm ơn tất cả mọi người về sự giúp đỡ và động viên quý báu này.

Thái Nguyên, tháng 3 năm 2014

Tác giả

Phan Duy Thanh

MỤC LỤC

Trang

Trang phụ bìa………………………………………………………….. ....

Lời cam đoan………………………………………………………….. i

Lời cảm ơn……………………………………………………… ii

Mục lục…………………………………………………………………. iii

MỞ ĐẦU... 1

NỘI DUNG……………………………………………………………. 5

Chương 1. Phép biến đổi tích phân Fourier cosine. Tích chập Fourier cosine với hàm trọng $\gamma(y) = \cos ay$ 5

1.1. Phép biến đổi tích phân Fourier cosine.. 5

1.2. Tích chập Fourier cosine với hàm trọng $\gamma(y) = \cos ay$ 9

Chương II. Phép biến đổi tích phân kiểu tích chập Fourier cosin với hàm trọng.. 13

(2-1) Định nghĩa... 13

(2-2) Định lý kiểu Watson. Bổ đề 2.1... 13

(2-3) Định lý kiểu Plancherel.. 19

Định lý 3.4... 19

(2-4) Các ví dụ.. 22

KẾT LUẬN.. 26

TÀI LIỆU THAM KHẢO... .27

CÁC KÝ HIỆU DÙNG TRONG LUẬN VĂN

Các không gian hàm được dùng trong luận văn

$\mathbb{R}_+ = \{x \in R : x > 0\}$

$L(\mathbb{R}_+)$ là tập hợp tất cả các hàm f xác định trên $(0, +\infty)$ sao cho $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$

MỞ ĐẦU

1) Lý do chọn đề tài

Phép biến đổi tích phân là một trong những vấn đề trụ cột của giải tích toán học, ra đời và không ngừng phát triển trong khoảng hai trăm năm qua. Phép biến đổi tích phân đóng vai trò quan trọng trong toán học cũng như trong nhiều lĩnh vực khoa học kỹ thuật khác như quang học, điện, cơ lượng tử, y sinh học, âm thanh,....

Các phép biến đổi tích phân ra đời sớm nhất có vai trò đặc biệt trong lý thuyết cũng như ứng dụng, trước hết là các phép biến đổi Fourier, Fourier sine, Fourier cosine, Laplace, Mellin, sau đó là các phép biến đổi tích phân Hilbert, Hankel, Kontorovich-Lebedev, Stieltjes,...

Xuất phát từ bài toán thực tế nghiên cứu về quá trình truyền nhiệt năm 1807 Fourier đã hoàn thành công trình về phép biến đổi tích phân Fourier $[6]$

Phép biến đổi tích phân Fourier có dạng (Xem $[2]$).

$$\left(Ff\right)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} f(x)dx,\;\; f \in L_1(\mathbb{R}_*); \qquad (0.1)$$

$$\left(Ff\right)(y) = \underset{N\to+\infty}{Lim}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{+N} e^{-iyx} f(x)dx,\;\; f \in L_P(\mathbb{R}). \qquad (0.2)$$

Trong trường hợp đối với f là hàm số chẵn hoặc lẻ ta nhận được phép biến đổi Fourier cosine và Fourier sine có dạng sau (xem $[6,10]$):

$$\left(F_C f\right)(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(xy)dx,\;\; f \in L_1(\mathbb{R}_+); \qquad (0.3)$$

$$\left(F_S f\right)(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(xy)dx,\;\; f \in L_1(\mathbb{R}_+)\;. \qquad (0.4)$$

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu http://www.lrc-tnu.edu.vn/

Và
$$\left(F_C f\right)(y)=\underset{N\to+\infty}{Lim}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{1}{N}}^{N} f(x)\cos(xy)dx,\ \ f\in L_P(\mathbb{R}_+); \tag{0.5}$$

$$\left(F_S f\right)(y)=\underset{N\to+\infty}{Lim}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\frac{1}{N}}^{N} f(x)\sin(yx)dx,\ \ f\in L_P(\mathbb{R}_+). \tag{0.6}$$

Ở đây các giới hạn được hiểu theo chuẩn trong không gian $L_P(\mathbb{R}_+)$. Các định nghĩa trên trùng nhau $f\in L_1(\mathbb{R}_+)\cap L_P(\mathbb{R}_+)$. Cùng với sự phát triển lý thuyết các phép biến đổi tích phân, một hướng phát triển mới của lý thuyết các phép biến đổi tích phân là tích chập của các phép biến đổi tích phân xuất hiện vào khoảng đầu thế kỷ 20.

Tích chập đầu tiên được xây dựng là tích chập đối với phép biến đổi tích phân Fourier, cụ thể là tích chập của hai hàm *f, g* đối với phép biến đổi Fourier có dạng sau (Xem $[7]$):

$$(f\underset{F}{*}\mathrm{g})(\mathrm{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathrm{y})g(x-y)\mathrm{dy},\mathrm{x}\in\mathbb{R}. \tag{0.7}$$

Tích chập này thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa

$$F(f\underset{F}{*}\mathrm{g})(y)=(Ff)(y).(Fg)(y),\ \forall y\in\mathbb{R};\ \forall f,\ g\in L_1(\mathbb{R}). \tag{0.8}$$

Năm 1951, Sneddon I.N xây dựng tích chập của hai hàm *f, g* đối với phép biến đổi Fourier cosine (Xem $[7]$):

$$(f\underset{F_C}{*}\mathrm{g})(\mathrm{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} f(\mathrm{y})\left[g(x+y)+g(|x-y|)\right]\mathrm{dy},\quad \mathrm{x}>0. \tag{0.9}$$

Tích chập này thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa và Đẳng thức Parseval sau (Xem $[7]$):

$$F_C(f\underset{F}{*}\mathrm{g})(y)\ =\ (F_C f)(y).(F_C g)(y),\ \forall y>0;\ \forall f,\ g\in L_1(\mathbb{R}_+); \tag{0.10}$$

$$(f\underset{F}{*}\mathrm{g})(x)=F_c\left[(F_c f)(y).(F_c g)(y)\right](x),\ \ \forall x>0;\ \ f,g\in L_2(\mathbb{R}_+). \tag{0.11}$$

Vào năm 2004 các tác giả Nguyễn Xuân Thảo, Nguyễn Minh Khoa đã xây dựng tích chập với hàm trọng $\gamma(y)=\cos y$ của hai hàm *f, g* thuộc $L_1(\mathbb{R}_+)$ đối với phép biến đổi Fourier cosine (Xem $[8]$):

$$\left(f \underset{F_c}{\overset{\gamma}{*}} g\right)(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f(y)\left[g(x+u+1)+g(|x-u+1|)+g(|x+u-1|)\right.$$

$$\left.+g(|x-u-1|)\right]\mathrm{du},\quad x>0. \qquad (0.12)$$

Tích chập này thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa

$$F_c\left(f \underset{F_c}{\overset{\gamma}{*}} g\right)(y)=\cos y.(F_c f)(y).(F_c g)(y),\ \ \forall y\ >\ 0. \qquad (0.13)$$

Đối với bất kỳ tích chập nào của hai hàm *f, g* khi cố định một hàm, chẳng hạn hàm *g* và cho hàm *f* thay đổi trong một không gian hàm nào đó ta nhận được phép biến đổi tích phân kiểu tích chập.

Phép biến đổi tích phân với thống nhất xây dựng theo hướng này là phép biến đổi Watson dựa trên tích chập Melin và phép biến đổi Melin.

Gần đây một số các phép biến đổi tích phân liên quan đến tích chập và tích chập suy rộng đã được khảo sát (Xem $[3,5,9,11]$).

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Trong luận văn của mình, tác giả xét tích chập với hàm trọng $\gamma_1(y)=\cos ay$ đối với phép biến đổi tích phân Fourier cosine. Dựa trên tích chập này và tích chập (0.9) để xây dựng và nghiên cứu phép biến đổi tích phân kiểu tích chập tương ứng nhận được diều kiện cần và đủ để phép biến đổi xây dựng được là unita trong không gian $L_2(\mathbb{R}_+)$. Định lý kiểu Plancherel và tính bị chặn của phép biến đổi mới xây dựng trong không gian $L_p(\mathbb{R}_+)$ đã được chứng minh.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Nghiên cứu tích chập, tích chập với hàm trọng và phép biến đổi tích phân kiểu tích chập.

4. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng các phép biến đổi tích phân, các tích chập đã biết và các kết quả giải tích, giải tích hàm.