ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – – –

TRẦN THỊ DUNG

ĐIỂM BẤT ĐỘNG VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH HÀM

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

– – – – – – – – – –

TRẦN THỊ DUNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số : 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS: HOÀNG VĂN HÙNG

Thái Nguyên - Năm 2014

Mục lục

Lời nói đầu

Phương trình hàm là một lĩnh vực khó trong chương trình nâng cao của toán sơ cấp. Các phương pháp giải phương trình hàm rất đa dạng và thường mang tính đặc thù, nghĩa là chúng phụ thuộc nhiều vào giả thiết của từng bài toán cụ thể và rất khó phân lớp các phương trình hàm theo các phương pháp giải. Lời giải của một bài toán về phương trình hàm thường đòi hỏi nhiều kỹ năng và kiến thức khác nhau của học sinh: kỹ năng biến đổi, các kiến thức về hàm số, nghiệm tổng quát của một số các phương trình hàm cơ bản,... Hiện có nhiều tài liệu chuyên khảo về các phương pháp giải phương trình hàm, nhưng trong hầu hết các tài liệu đó có thể thấy rằng số lượng các ví dụ minh họa cho mỗi một phương pháp giải là rất ít. Điều này có thể giải thích bởi hai lý do: thứ nhất, có quá nhiều ví dụ cho việc ứng dụng một phương pháp nào đó có thể làm cho người đọc nhàm chán(chẳng hạn, phương pháp giải các phương trình hàm dạng $f(\phi(x)) = a(x)f(x) + b(x)$, trong đó $\phi(x)$ là một hàm đã cho có chu kỳ lặp, $a(x), b(x)$ là các hàm cho trước và f là hàm cần tìm); thứ hai, nếu có một ví dụ nào đó thực sự không gây ra nhàm chán thì thường lời giải của nó là một tổ hợp các phương pháp và xếp lời giải ví dụ này vào một phương pháp cụ thể nào đó thiếu sức thuyết phục.

Trong các phương trình hàm có một lớp các phương trình (khá hẹp, căn cứ trên các ví dụ minh họa của các tài liệu về phương trình hàm) mà lời giải của nó dựa vào sự tồn tại các điểm bất động của một ánh xạ nào đó. Chúng tôi gọi phương pháp giải các phương trình hàm loại này là phương pháp điểm bất động.

Cho X, Y là các tập có tính chất $X \cap Y \neq \emptyset$ và $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Điểm $x^* \in X$ gọi là một điểm bất động của f nếu $f(x^*) = x^*$. Bản luận văn **"Điểm bất động và các phương trình hàm"** tập hợp các ví dụ về phương trình hàm mà lời giải của nó có dùng đến các tính chất khác nhau của tập các điểm bất động của một ánh xạ f nào đó. Nội dung của luận văn gồm Lời nói đầu, hai chương, phần kết luận và tài liệu tham khảo.

CHƯƠNG I. CÁC ĐỊNH LÝ SƠ CẤP VỀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG VÀ CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Chương này trình bày định nghĩa điểm bất động, một số các định lý sơ cấp về điểm bất động, nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian metric và một kết quả trong bài báo [1]. Trong mục 1.2, các tính chất của tập điểm bất động được vận dụng để tìm các hàm có thể là nghiệm của các phương trình hàm được xét, nghiệm thực sự của phương trình hàm được tìm bằng cách thử trực tiếp các hàm khả dĩ là nghiệm vào phương trình hàm đã cho. Một số trong các ví dụ này là các bài toán trong các kỳ thi Olympic Toán quốc tế IMO, đã trở thành các ví dụ kinh điển cho việc ứng dụng điểm bất động vào phương trình hàm và được trình bày trong nhiều tài liệu (chẳng hạn [2]). Một số các ví dụ khác do tác giả tự sáng tác dưới sự hướng dẫn của T.S Hoàng Văn Hùng.

Mục 1.3 trình bày nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian metric và ứng dụng nguyên lý này vào việc giải một số dạng phương trình hàm. Các phương trình hàm trong mục này thường được xét trong các lớp hàm có tính chất đặc biệt (ví dụ lớp các hàm bị chặn, lớp các hàm liên tục, ...). Các lớp hàm này là các không gian metric đầy đủ, còn các phương trình hàm được xét được viết lại dưới dạng $(Tf)(x) = f(x)$, trong đó f là hàm cần tìm và T là ánh xạ co chặt trên không gian metric đầy đủ tương ứng. Các phương trình hàm trong mục này đều duy nhất nghiệm.

Mục 1.4 trình bày một kết quả của tác giả Hoàng Văn Hùng trong [1], kết quả này cho phép khẳng định sự vô nghiệm của một số các phương trình hàm dựa trên cấu trúc tập điểm bất động của các ánh xạ lặp của một ánh xạ g nào đó. Các ví dụ của mục này là các phương trình hàm xuất hiện cả ở trong đại số tuyến tính lẫn giải tích.

CHƯƠNG II. NGUYÊN LÝ ÁNH XẠ CO BANACH TRONG KHÔNG GIAN METRIC SUY RỘNG VÀ SỰ ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA CÁC PHƯƠNG TRÌNH HÀM DẠNG CAUCHY

Chương này trình bày nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian metric suy rộng. Nguyên lý này là cơ sở để áp dụng phương pháp điểm bất động vào việc xét sự ổn định nghiệm của các phương trình hàm dạng Cauchy. Mục 2.2 trình bày các kết quả của C.Park và Th.M Rassias về sự ổn định nghiệm của phương trình hàm Cauchy. Các kết quả này tổng quát kết quả của Hyers [4] và được chứng minh bằng cách áp dụng nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian metric suy rộng. Để chỉ ra áp dụng của kết quả vào lĩnh vực phương trình hàm sơ cấp, tác giả dẫn ra hai ví dụ, một ví dụ lấy trong tài liệu tham khảo, ví dụ khác tác giả tự sáng tác.

Mục 2.3 trình bày một kết quả của Soon-Mo Jung và Seungwook Min [7] về sự ổn định nghiệm của một lớp các phương trình hàm dạng Cauchy. Chứng minh kết quả này cũng dựa trên nguyên lý ánh xạ co Banach trong không gian metric suy rộng, tức là áp dụng phương pháp điểm bất động. Áp dụng của các kết quả này vào lĩnh vực phương trình hàm sơ cấp là các kết luận về nghiệm của các phương trình hàm dạng $f(x+y) = Af(x) + Bf(y)$, trong đó A, B là các hằng số.

Tài liệu tham khảo gồm 10 danh mục.

Bản luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của T.S Hoàng Văn Hùng, Viện Khoa học Cơ bản – Đại học Hàng Hải Việt Nam. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thày hướng dẫn và tập thể các thày cô thuộc khoa Toán – Tin, Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, những người đã tận tình giúp đỡ cũng như tạo các điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành chương trình cao học và bản luận văn này.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 5 năm 2013

Người viết

Trần Thị Dung

Chương 1

Các định lý sơ cấp về điểm bất động và các bài toán về phương trình hàm

1.1 ĐIỂM BẤT ĐỘNG

1.1.1 Định nghĩa

Cho X, Y là các tập có tính chất $X \cap Y \neq \emptyset$ và $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Điểm $x^* \in X$ gọi là một điểm bất động của f nếu $f(x^*) = x^*$.

Tập các điểm bất động của ánh xạ f ký hiệu là $F\mathrm{ix}(f)$.

1.1.2 Ví dụ

1) Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi $f(x) = x^3$ có 3 điểm bất động, $F\mathrm{ix}(f) = \{-1, 0, 1\}$.

2) Ánh xạ $g : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ cho bởi $g(x) = sinx$ có duy nhất điểm bất động $x^* = 0, F\mathrm{ix}(g) = \{0\}$.

3) Ánh xạ $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi $h(x) = x + 1$ không có điểm bất động, $F\mathrm{ix}(h) = \emptyset$.

1.2 MỘT SỐ ĐỊNH LÝ SƠ CẤP VỀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM.

1.2.1 Định lý

Mọi ánh xạ liên tục từ khoảng đóng [a;b] vào chính nó có ít nhất một điểm bất động.

Chứng minh.

Giả sử f là ánh xạ liên tục từ $[a; b]$ vào chính nó. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Khi đó $g(x)$ là hàm liên tục. Vì $f(a), f(b) \in [a; b]$ nên $g(a).g(b) = (f(a) - a)(f(b) - b) \leq 0$.

Vậy phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x^* \in [a;b]$, tức $g(x^*) = 0$ hay $f(x^*) = x^*$. Do đó f có ít nhất một điểm bất động.

1.2.2 Định lý

i) Nếu f là hàm thực sự giảm trên tập số thực X thì f không có quá một điểm bất động trên X.

ii) Nếu hàm $\frac{f(x)}{x}$ thực sự đơn điệu trên tập số thực X thì f có không quá một điểm bất động trên X.

Chứng minh

i) Hàm $g(x) = f(x) - x$ thực sự giảm trên X nên g sẽ nhận mỗi giá trị của tập $g(X)$ không quá một lần khi $x \in X$.Do đó nếu $g(X)$ không chứa giá trị 0 thì f không có điểm bất động. Nếu $g(X)$ chứa giá trị 0 thì f có đúng một điểm bất động.

ii) Do tính đơn điệu thực sự, hàm $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in X$ nhận mỗi giá trị thuộc miền giá trị $g(X)$ của nó không quá một lần trên X. Nếu $g(X)$ chứa 1 thì f có đúng một điểm bất động trên X, nếu $g(X)$ không chứa 1 thì f không có điểm bất động trên X.

1.2.3 Định lý

Giả sử $F(u)$ là hàm một biến thực, $\phi(x,y,s,t)$ là hàm cho trước của 4 biến x,y,s,t xác định trên tập dạng $X \times X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (X là tập con của tập số thực $\mathbb{R}$). Nếu hàm $F(u)$ có điểm bất động duy nhất u^* thì mọi nghiệm của phương trình hàm:

$$F(\phi(x,y,f(x),f(y))) = \phi(y,x,f(y),f(x))\,(x,y \in X) \tag{1.1}$$

(trong đó f là hàm một biến cần tìm có tập xác định là X) phải thỏa mãn phương trình:

$$\phi(x,x,f(x),f(x)) = u^*.$$

Chứng minh. Nếu $f(x)$ là hàm thỏa mãn (1.1) thì đặt $y = x \in X$ ta nhận được:

$$F(\phi(x,x,f(x),f(x))) = \phi(x,x,f(x),f(x))\,(\forall x \in X). \tag{1.2}$$

Đẳng thức (1.2) chứng tỏ $\phi(x,x,f(x),f(x))$ là điểm bất động của F với mọi $x \in X$. Do F chỉ có duy nhất điểm bất động u^* nên ta phải có:

$$\phi(x,x,f(x),f(x)) = u^* \quad (\forall x \in X).$$

Định lý 1.2.3 cho một điều kiện cần đối với nghiệm của phương trình (1.1). Khi áp dụng định lý 1.2.3 để giải các phương trình hàm dạng (1.1) thường ta sẽ chứng minh rằng phương trình $F(u) = u$ có duy nhất nghiệm u^* trong một miền nào đó chứa miền giá trị của ϕ, sau đó giải phương trình (1.2) và thử các nghiệm tìm được từ (1.2) vào (1.1). Các nghiệm của (1.2) thỏa mãn (1.1) sẽ là tất cả các nghiệm của (1.1).

Ví dụ 1. Tìm tất cả các hàm f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, thực sự giảm và thỏa mãn phương trình $f(x + f(y)) = f(x) + y \quad (\forall x, y \in \mathbb{R})$.

Giải. Đặt trong phương trình của bài toán $y = x = 0$ ta có $f(f(0)) = f(0)$. Vậy $f(0)$ là một điểm bất động của f. Từ định lý 1.2.2 suy ra rằng $f(0)$ là điểm bất động duy nhất của f trên $\mathbb{R}$. Áp dụng định lý 1.2.3 cho hàm $\phi(x, y, f(x), f(y)) = x + f(y)$ ta suy ra mọi nghiệm f của bài toán đã cho phải thỏa mãn phương trình $x + f(x) = f(0)$ hay $f(x) = f(0) - x$. Đặt $f(0) = c$, ta suy ra mọi nghiệm của bài toán đã cho phải có dạng $f(x) = c - x$ (c là hằng số thực). Thay$f(x) = c - x$ vào phương trình của bài toán ta được:

$$c - (x + c - y) = c - x + y \to c = 0.$$

Vậy $f(x) = -x$. Rõ ràng hàm $f(x) = -x$ là thực sự giảm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn phương trình f$(x + f(y)) = f(x) + y$. Do đó hàm $f(x) = -x$ là nghiệm duy nhất của bài toán đã cho.

Ví dụ 2 (1983,IMO): Tìm tất cả các hàm $f : (0, +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn :

i) $f(xf(y)) = yf(x)$ với mọi x, y dương.

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Giải. Đặt $y = x = 1$ trong điều kiện i) ta được $f(f(1)) = f(1)$. Vậy $f(1)$ là một điểm bất động của f. Lấy $x = 1$ và $y = f(1)$, từ i) ta nhận được $f(f(f(1))) = f(1)^2$. Do $f(1)$ là điểm bất động của f thì đẳng thức trên cho ta $f(1) = f(1)^2$. Vì f chỉ nhận các giá trị dương nên đẳng thức này cho $f(1) = 1$. Vậy u^* là điểm bất động của f.

Nếu $x^* > 0$ là một điểm bất động của f thì đặt trong điều kiện i) $y = x = x^*$ ta nhận được $f\left((x^*)^2\right) = (x^*)^2$. Vậy $(x^*)^2$ cũng là một điểm bất động của f.

Nếu $(x^*)^n$ là một điểm bất động của f thì đặt trong i) $x = x^*$, $y = (x^*)^n$ ta có $f\left((x^*)^{n+1}\right) = (x^*)^{n+1}$. Theo nguyên lý quy nạp ta suy ra $(x^*)^n$ là điểm bất động của f với mọi n nguyên dương. Do đó nếu $x^* > 1$ ta suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} (x^*)^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} f((x^*)^n) =$