ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

VŨ LỆ THỦY

VỀ MỘT LỚP BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN HAI CẤP

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

VŨ LỆ THỦY

VỀ MỘT LỚP BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN HAI CẤP

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. LÊ DŨNG MƯU

Thái Nguyên - 2014

Mục lục

Mở đầu

Bất đẳng thức biến phân là một vấn đề quan trọng của Toán học Ứng dụng. Bài toán này có rất nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau. Ngoài ra, nhiều bài toán quan trọng như tối ưu lồi, bài toán bù, các bài toán phương trình vi phân và đạo hàm riêng v.v... đều có thể mô tả dưới dạng một bất đẳng thức biến phân.

Bất đẳng thức biến phân đã được bắt đầu nghiên cứu từ thập kỷ 60 của thế kỷ trước, tuy nhiên bài toán này vẫn là một vấn đề thời sự vì vai trò quan trọng của nó trong lý thuyết toán học và trong ứng dụng thực tế. Một trong những hướng nghiên cứu quan trọng là xây dựng các phương pháp giải.

Gần đây bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp mà một trường hợp riêng quan trọng là bài toán cực tiểu một chuẩn trên tập nghiệm của một bất đẳng thức biến phân đang được nhiều người quan tâm nghiên cứu. Bài toán này xuất hiện trong nhiều vấn đề khác nhau, ví dụ trong vấn đề hiệu chỉnh bài toán bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu. Việc giải bài toán này không thể áp dụng trực tiếp được bằng các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân thông thường (một cấp) đã có, do cấu trúc lồng nhau và phụ thuộc nhau của bài toán hai cấp.

Mục đích của bản luận văn này là giới thiệu một cách cơ bản về bài toán bất đẳng thức biến phân. Đặc biệt luận văn đi sâu vào một thuật toán giải bài toán cực tiểu hàm chuẩn trên tập nghiệp của bài toán bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu. Thuật toán được trình bày ở luận văn được lấy từ một bài báo gần đây của tác giả Bùi Văn Định và Lê Dũng Mưu ở tạp chí ACTA Mathematica Vietnamica. Đây là một thuật toán dựa trên phương pháp chiếu kết hợp với kỹ thuật tìm kiếm Armijo và siêu phẳng cắt để thu được sự hội tụ mạnh trong không gian Hilbert.

Bản luận văn ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo còn có hai chương. Chương 1 có tiêu đề "Bài toán bất đẳng thức biến phân." Trong chương này tôi trình bày một số kiến thức cơ bản về bài toán bất đẳng thức biến phân và các bài toán liên quan. Tiếp đó là một số kết quả về việc sử dụng toán tử đơn điệu trong việc chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân. Chương 2 có tiêu đề là: "Bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp" Chương này giành để trình bày các kiến thức cơ bản về một bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp và chủ yếu trình bày một thuật toán dựa theo nguyên lý bài toán phụ kết hợp với kỹ thuật tìm kiếm theo tia và siêu phẳng cắt để giải bài toán này.

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Lê Dũng Mưu. Tôi xin bày tỏ sự kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc đối với Thầy, Thầy đã dành nhiều thời gian trực tiếp tận tình hướng dẫn cũng như giải đáp những thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm và hoàn thiện luận văn. Qua đây tôi cũng xin gửi lời cảm ơn các Thầy, Cô tại Đại học Thái Nguyên và tại Viện toán học đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi hoàn thành khóa học.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn tới cơ quan, gia đình và bạn bè đã luôn quan tâm động viên, tạo điều kiện và ủng hộ tôi trong suốt quá trình học tập và làm luận văn tốt nghiệp.

Thái Nguyên, ngày 21 tháng 6 năm 2014.

Tác giả

Vũ Lệ Thủy

Chương 1

Bài toán bất đẳng thức biến phân

Trong toàn bộ chương này, chúng ta sẽ làm việc trên không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Trước tiên ta trình bày một số kiến thức cơ bản về bài toán bất đẳng thức biến phân và các bài toán liên quan. Tiếp đó là một số kết quả về việc sử dụng toán tử đơn điệu trong việc chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân. Các kiến thức trong chương này được lấy trong tài liệu [1], [2], [3], [4], [6], [7], [8].

1.1 Phát biểu bài toán và ví dụ

1.1.1 Một số kiến thức cơ bản về không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1. Cho $\mathbb{H}$ là một không gian tuyến tính. Tích vô hướng xác định trên $\mathbb{H}$ là một ánh xạ được xác định:

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle :\ \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle x, y \rangle &\longmapsto \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện sau:

i. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{H}$;
ii. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ *với mọi* $x, y, z \in \mathbb{H}$;
iii. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ *với mọi* $x, y \in \mathbb{H}$. *và* $\alpha \in \mathbb{R}$;
iv.$\langle \alpha x, x\rangle \geq 0$ *với mọi* $x \in \mathbb{H}, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$\langle x, y\rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai vectơ x và y.
Cặp $(\mathbb{H}, \langle .,. \rangle)$ được gọi là không gian tiền Hilbert (hay còn gọi là không gian

Unita). Sự hội tụ, khái niệm tập mở,...,trong $(\mathbb{H}, \langle ., . \rangle)$ luôn được gắn với chuẩn sinh bởi $\langle x, y \rangle$. Nếu không gian định chuẩn tương ứng đầy đủ thì ta nói $(\mathbb{H}, \langle ., . \rangle)$ là không gian Hilbert.

Định lý 1.1. *Cho $\mathbb{H}$ là không gian tiền Hilbert, với mọi $x, y \in \mathbb{H}$ ta luôn có bất đẳng thức sau:*

$$| \langle x, y \rangle |^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle,$$

bất đẳng thức này gọi là bất đẳng thức Schwarz.

Định lý 1.2. *Cho $\mathbb{H}$ là không gian tiền Hilbert. Khi đó:*

$$\| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, x \in \mathbb{H},$$

xác định một chuẩn trên $\mathbb{H}$.

Định lý 1.3. *Cho $\mathbb{H}$ là không gian Hilbert, khi đó:*

$$\langle ., . \rangle : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R},$$

là một hàm liên tục.

Định lý 1.4. *Với mọi x, y trong không gian tiền Hilbert, ta có:*

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Định nghĩa 1.2. Hai vectơ $x, y \in \mathbb{H}$ được gọi là hai vectơ trực giao với nhau, kí hiệu là $x \perp y$, nếu $\langle x, y \rangle = 0$.
Từ định nghĩa dễ dàng suy ra các tính chất sau:

i. $0 \perp x, \forall x \in X$;
ii. $x \perp y \Rightarrow y \perp x$;
iii. $x \perp \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \Rightarrow x \perp \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n, n \in N^*, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$;
iv. $x \perp y_n, y_n \to y$ *khi* $n \to \infty$ *thì* $x \perp y$.

Định nghĩa 1.3. Cho tập $M \subset \mathbb{H}$, phần bù trực giao của M, kí hiệu $M^\perp$ là tập hợp sau:

$$M^\perp = \{x \in \mathbb{H} : x \perp y, \ \forall y \in \mathbb{H}\}.$$

Định lý 1.5. *(Tích vô hướng sinh bởi chuẩn). Cho* $(X, \| \cdot \|)$ *là một không gian tuyến tính định chuẩn trên không gian Hilbert* $\mathbb{H}$. *Giả sử với mọi* $x, y \in X$, *thỏa mãn:*

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Khi đó trên X *có một tích vô hướng thỏa mãn* $\langle x, x \rangle = \| x \|^2$.

Định nghĩa 1.4. Cho A là một toán tử trong không gian Hilbert $\mathbb{H}$, ánh xạ: $A^* : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ xác định như sau:

$$\forall y \in \mathbb{H}, A^* y = y^*;$$

trong đó:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle = \langle x, y^* \rangle.$$

Khi đó A^* được gọi là toán tử liên hợp của toán tử A.

Định lý 1.6. *(Định lí F. Riesz). Với mỗi vectơ a cố định thuộc không gian Hilbert* $\mathbb{H}$ *hệ thức:*

$$f(x) = \langle a, x \rangle. \tag{1.1}$$

Xác định một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ *trên không gian Hilbert* $\mathbb{H}$ *với:*

$$\| f \| = \| a \| . \tag{1.2}$$

Ngược lại, bất kỳ phiếm hàm tuyến tính liên tục $f(x)$ *nào trên không gian Hilbert* $\mathbb{H}$ *cũng đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng (1.1), trong đó a là một vectơ của* $\mathbb{H}$ *thỏa mãn (1.2).*

1.1.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân.

Cho một tập con K của $\mathbb{H}$ và ánh xạ $F : K \to \mathbb{H}$.
Bài toán bất đẳng thức được kí hiệu là $VIP(K; F)$ là bài toán tìm x^* sao cho:

$$x^* \in K, \left\langle F(x^*), x - x^* \right\rangle \geq 0, \ \forall x \in K. \tag{1.3}$$

Tập hợp những điểm x^* thỏa mãn (1.3) được gọi là tập nghiệm của $VIP(K; F)$ và kí hiệu là $SOL - VIP(K; F)$.

1.1.3 Các trường hợp riêng và ví dụ thực tế.

Một trong những lớp bài toán quan trọng và là một trường hợp riêng của bài toán bất đẳng thức biến phân là bài toán bù được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.5. Cho K là một tập con khác rỗng, lồi, đóng trong $\mathbb{H}$, K^* là nón đối ngẫu của K và cho ánh xạ: $F : K \to H$. Bài toán bù, kí hiệu là $NCP(K;F)$ là bài toán:

$$(NCP(K;F)) \begin{cases} \text{Tìm vectơ } x^* \in K \text{sao cho :} \\ F(x^*) \in K^* \\ \langle x^*, F(x^*) \rangle = 0 \end{cases}$$

Tập hợp nghiệm của $NCP(K;F)$ được kí hiệu là $SOL - NCP(K;F)$.

Mệnh đề 1.1. *Nếu K là một nón lồi, đóng trong $\mathbb{H}$ thì tập nghiệm của bài toán $NCP(K;F)$ và bài toán $VIP(K;F)$ là trùng nhau, tức là:*

$$SOL - VIP(K;F) = SOL - NCP(K;F).$$

Chứng minh
Giả sử $x^* \in SOL - VIP(K;F)$. Theo định nghĩa ta có:

$$\begin{cases} x^* \in K; \\ \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \ \forall x \in K. \end{cases}$$

Bằng cách lấy $x = 0 \in K$ suy ra:

$$\langle F(x^*, -x^*) \rangle \geq 0. \tag{1.4}$$

Bằng cách lấy $x = 2x^* \in K$ ta thu được:

$$\langle F(x^*), x^* \rangle \geq 0. \tag{1.5}$$

Từ (1.4) và (1.5) ta kết luận:

$$\langle F(x^*), x^* \rangle = 0. \tag{1.6}$$

Mặt khác từ định nghĩa ta có:

$$0 \leq \langle F(x^*), x - x^* \rangle = \langle F(x^*), x \rangle - \langle F(x^*), x^* \rangle = \langle F(x^*), x \rangle, \forall x \in K.$$

Điều này chứng tỏ: $F(x^*) \in K^*$. Kết hợp với (1.6) ta có:

$$x^* \in SOL - NCP(K;F);$$

hay:

$$SOL - VIP(K;F) \subset SOL - NCP(K;F).$$

Ngược lại, giả sử $x^* \in SOL - NCP(K;F)$. Theo định nghĩa ta có:

$$\begin{cases} F(x^*) \in K^*; \\ \langle x^*, F(x^*) \rangle = 0. \end{cases}$$

Mặt khác vì $F(x^*) \in K^*$ nên với mọi $x \in K$ ta có:

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle = \langle F(x^*), x \rangle - \langle F(x^*), x^* \rangle = \langle F(x^*), x \rangle \geq 0.$$

Điều này suy ra:

$$x^* \in SOL - VIP(K;F);$$

hay

$$SOL - NCP(K;F) \subset SOL - VIP(K;F).$$

Kết luận lại ta có:

$$SOL - VIP(K;F) = SOL - NCP(K;F).$$

Mệnh đề được chứng minh.

Định nghĩa 1.6. Cho K là một tập khác rỗng, lồi, đóng trong $\mathbb{H}$ và ánh xạ

$$F : K \to K.$$

Điểm $\bar{x} \in K$ được gọi là điểm bất động của ánh xạ F nếu thỏa mãn điều kiện:

$$F(\bar{x}) = \bar{x}.$$

BÀI TOÁN QUY HOẠCH LỒI.

Cho K là tập lồi, đóng, khác rỗng trong $\mathbb{H}$ và $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ là một hàm lồi trên K. Bài toán quy hoạch lồi được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in K : f(x^*) = min f(x) \mid x \in K. \tag{OP}$$

Mệnh đề 1.2. *Giả sử : $f : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ là hàm lồi khả vi trên tập lồi $K \in \mathbb{H}$. Khi đó $x^* \in K$ là nghiệm của bài toán (OP) khi và chỉ khi x^* là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân:*

$$\textit{Tìm } x^* \in K \textit{ sao cho } \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \ \forall x \in K;$$

trong đó: $\nabla f(x^*)$ là đạo hàm của f tại x^*.

Ta xét các ví dụ thực tế của bài toán bất đẳng thức biến phân.