ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HÀ THỊ MINH TRANG

QUI HOẠCH TOÀN PHƯƠNG VÀ BÀI TOÁN BÙ TUYẾN TÍNH

Quadratic Programming and the Linear Complementarity Problem

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS.TS Trần Vũ Thiệu

Thái Nguyên - 2014

Mục lục

Lời nói đầu

Qui hoạch toàn phương (Quadratic Programming, viết tắt là QP) là bài toán tìm cực tiểu của một hàm bậc hai với các ràng buộc tuyến tính:

$$\min\{f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x : x \in D\}, \tag{QP}$$

trong đó $Q \in S^n$ (ma trận vuông đối xứng), $c \in \mathbb{R}^n$ và D là tập lồi đa diện cho trước. Nếu Q xác định dương hay nửa xác định dương thì (QP) là bài toán qui hoạch toàn phương lồi, còn nếu Q không xác định thì (QP) là bài toán qui hoạch toàn phương không lồi. Các bài toán qui hoạch toàn phương rất được quan tâm nghiên cứu, vì nhiều vấn đề nảy sinh trong thực tiễn có thể diễn đạt dưới dạng bài toán (QP). Qui hoạch toàn phương, nói riêng là qui hoạch tuyến tính (Linear Programming, viết tắt là LP), liên quan chặt chẽ với bài toán bù tuyến tính.

Bài toán bù tuyến tính (Linear Complementarity Problem, viết tắt là LCP), do R. W. Cottle và G. B. Dantzig [2] đề xuất năm 1968, là bài toán tổng quát mô tả thống nhất các bài toán qui hoạch tuyến tính, qui hoạch toàn phương và trò chơi song ma trận. Các nghiên cứu về bài toán bù tuyến tính đã đem lại nhiều lợi ích, vượt xa các kết quả cụ thể. Chẳng hạn, *thuật toán xoay bù* (complementarity pivot algorithm) lúc đầu được đề xuất cho bài toán bù tuyến tính đã được mở rộng trực tiếp để tạo ra các thuật toán hiệu quả tính điểm bất động Brouwer và Kakutani, tính các trạng thái cân bằng kinh tế, giải các hệ phương trình phi tuyến và tìm nghiệm tối ưu cho bài toán qui hoạch phi tuyến. Tương tự, các phương pháp lặp được đề xuất cho bài toán bù tuyến tính đã tạo điều kiện tốt cho việc xử lý các bài toán qui hoạch tuyến tính cỡ rất lớn mà không thể giải quyết bằng phương pháp đơn hình quen thuộc, do kích thước bài toán quá lớn đã gây ra nhiều khó khăn trong tính toán số. Vì những lẽ đó, trong lĩnh vực nghiên cứu bài toán bù tuyến tính người ta đã dành nhiều giải thưởng có giá trị cao cho những ai có thành tích xuất sắc trong học tập hoặc nghiên cứu về tối ưu hóa hoặc gắn bó với sự nghiệp ứng dụng tối ưu trong thực tiễn.

Mục tiêu của luận văn là tìm hiểu và trình bày khái quát về bài toán qui hoạch toàn phương (lồi và không lồi), bài toán bù tuyến tính và phân tích mối quan hệ giữa bài toán qui hoạch toàn phương và bài toán bù tuyến tính.

Nội dung luận văn được viết thành ba chương:

Chương 1: "Kiến thức chuẩn bị về ma trận" nhắc lại khái niệm về ma trận xác định dương, nửa xác định dương và tóm tắt một số kết quả lý thuyết bổ ích về ma trận, cách kiểm tra tính xác định của ma trận. Các ma trận xác định dương và nửa xác định dương liên quan chặt chẽ với hàm toàn phương và qui hoạch toàn phương. Các kiến thức này sẽ được sử dụng đến ở các chương sau khi đề cập đến bài toán qui hoạch toàn phương và bài toán bù tuyến tính.

Chương 2: "Bài toán quy hoạch toàn phương" trình bày nội dung bài toán qui hoạch toàn phương, một số ứng dụng của bài toán, sự tồn tại nghiệm của bài toán, đáng chú ý là Định lý Frank - Wolfe (1956) và Định lý Eaves (1971). Cuối chương trình bày định lý về điều kiện cần tối ưu KKT cho nghiệm cực tiểu địa phương và định lý điều kiện đủ tối ưu khi hàm mục tiêu f(x) lồi.

Chương 3: "Bài toán bù tuyến tính" giới thiệu khái quát về bài toán bù tuyến tính và cách tiếp cận tổ hợp giải bài toán dựa trên khái niệm nón bù. Phân tích mối quan hệ của bài toán bù tuyến tính với qui hoạch tuyến tính và qui hoạch toàn phương, đặc biệt chỉ ra rằng bài toán qui hoạch tuyến tính và bài toán qui hoạch toàn phương có thể qui được về bài toán bù tuyến tính.

Do thời gian và kiến thức còn hạn chế nên chắc chắn luận văn này còn có những thiếu sót nhất định, kính mong quí thầy cô và các bạn đóng góp ý kiến để tác giả tiếp tục hoàn thiện luận văn này.

Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn, tôi đã nhận được sự dạy bảo tận tình của các thầy cô giáo ở trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên. Đặc biệt là sự chỉ bảo, hướng dẫn trực tiếp của GS. TS Trần Vũ Thiệu. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới GS. TS Trần Vũ Thiệu, tới Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, trường THPT An Dương - Hải Phòng, các thầy cô giáo và các bạn đồng nghiệp đã giúp đỡ tôi trong suốt thời gian qua.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2014

Tác giả

Hà Thị Minh Trang

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ VỀ MA TRẬN

Chương này nhắc lại khái niệm về ma trận xác định dương, nửa xác định dương và nêu một số kết quả lý thuyết hữu ích về ma trận, cách kiểm tra tính xác định của ma trận. Các ma trận xác định dương và nửa xác định dương liên quan chặt chẽ với hàm toàn phương và qui hoạch toàn phương. Nội dung của chương được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [1], [3] - [5].

1.1. Ma trận xác định dương và nửa xác định dương

Mục này nhắc lại khái niệm về ma trận xác định dương và nửa xác định dương thường gặp trong qui hoạch toàn phương và bài toán bù tuyến tính.

Định nghĩa 1.1. Ma trận Q vuông cấp n, đối xứng hay không đối xứng, gọi là *xác định dương* (positive definte matrix) nếu $x^TQx > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$; Q gọi là *nửa xác định dương* (positive definte matrix) nếu $x^TQx \geq 0$ với $x \in \mathbb{R}^n$. Ma trận Q gọi là *xác định âm* (negative definite matrix) (*nửa xác định âm* - negative semidefinite matrix) nếu - Q là xác định dương (nửa xác định dương). Ma trận Q gọi là *không xác định* (indefinite matrix) nếu x^TQx dương với x này và âm với x khác.

Nếu Q không đối xứng, ta có thể thay nó bằng ma trận đối xứng $\left(\mathrm{Q} + \mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\right)/2$ mà không làm thay đổi tính xác định của ma trận, bởi vì $x^T\left(Q + Q^T\right)x = 2x^TQx$.

Ví dụ 1.1. Cho các ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Có thể thấy A xác định dương, B nửa xác định dương, C xác định âm, D nửa xác định âm và E không xác định.

Định nghĩa 1.2. Cho $Q = (q_{\mathrm{ij}})$ là ma trận vuông cấp n. Giả sử $\{\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_\mathrm{k}\} \subseteq \{1, \ldots, \mathrm{n}\}$ là tập chỉ số với các phần tử xếp theo thứ tự tăng dần. Xóa tất cả các phần tử của Q ở hàng i và cột i với $\mathrm{i} \notin \{\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_\mathrm{k}\}$, ta nhận được ma trận con cấp $\mathrm{k} \times \mathrm{k}$ của Q

$$\begin{pmatrix} q_{i_1 i_1} & \cdots & q_{i_1 i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{i_k i_1} & \cdots & q_{i_k i_k} \end{pmatrix}$$

Ma trận này gọi là *ma trận con chính* (principal submatrix) của Q xác định bởi tập chỉ số $\{\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_\mathrm{k}\}$. Bằng cách đặt $\mathrm{J} = \{\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_\mathrm{k}\}$, ta ký hiệu ma trận con chính là Q_{JJ}. Đó là ma trận $(\mathrm{q_{ij}} : \mathrm{i} \in \mathrm{J}, \mathrm{j} \in \mathrm{J}\}$. Định thức của ma trận con chính gọi là *định thức con chính* (principal determinatnt) của Q xác định bởi tập chỉ số J. Ma trận con chính của Q xác định bởi tập $\mathrm{J} = \emptyset$ (tập rỗng) là ma trận rỗng (không chứa phần tử nào). Qui ước định thức của ma trận rỗng bằng 1. Ma trận con chính của Q xác định bởi tập $\mathrm{J} = \{1, \ldots, \mathrm{n}\}$ chính là Q. Ma trận con chính của Q xác định bởi tập $\mathrm{J} \neq \emptyset$ gọi là *ma trận con chính khác rỗng* (non-empty principal submatrix) của Q. Do số tập con khác rỗng của $\{1, \ldots, \mathrm{n}\}$ là $2^\mathrm{n} - 1$ nên có tất cả $2^\mathrm{n} - 1$ ma trận con chính khác rỗng của Q. Các ma trận con chính của Q xác định bởi tập chỉ số $\mathrm{J} \subset \{1, \ldots, \mathrm{n}\}$ gọi là *ma trận con chính thực sự* (proper principal submatrix) của Q. Vì thế, mỗi ma trận con chính thực sự của Q có cấp $\mathrm{k} \leq \mathrm{n} - 1$.

Ví dụ 1.2. Cho

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Ma trận con chính cấp 1, lần lượt tương ứng với $\mathrm{J} = \{1\}, \{2\}$ và $\{3\}$, là các phần tử đường chéo 1, 5 và 9. Ma trận con chính cấp 2, lần lượt tương ứng với $\mathrm{J} = \{1, 2\}, \{1, 3\}$ và $\{2, 3\}$ là các ma trận 2×2 sau đây:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ và } \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Ma trận con chính cấp 3×3, tương ứng với $\mathrm{J} = \{1, 2, 3\}$, chính là Q. Có tất cả $2^3 - 1 = 7$ ma trận con chính khác rỗng.

Định nghĩa 1.3. Ma trận con chính cấp k của Q, xác định bởi tập chỉ số $\mathrm{J} = \{1, \ldots, \mathrm{k}\}$, tức là ma trận nhận được từ Q bằng cách bỏ đi $\mathrm{n} - \mathrm{k}$ hàng và cột cuối, gọi là *ma trận con chính chủ đạo* (leading principal submatrix) cấp k của Q. Định thức của ma trận con chính chủ đạo được gọi là *định thức con chính chủ đạo* (leading principal subdeterminant).

Trong Ví dụ 1.2, ma trận con chính chủ đạo cấp 1 là 1 (bỏ đi 2 hàng và 2 cột cuối). Ma trận con chính chủ đạo cấp 2 là ma trận con chính thứ nhất trong 3 ma trận con chính cấp 2 đã liệt kê và ma trận con chính chủ đạo cấp 3 chính là Q. Số ma trận con (định thức con) chính chủ đạo của ma trận cấp $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ bằng n.

1.2. Một số kết quả về ma trận

Mục này nêu một số kết quả hữu ích trong nghiên cứu các ma trận xác định dương và nửa xác định dương.

Kết quả 1.1. *Nếu* $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_{11})$ *là ma trận cấp* 1×1 *thì A xác định dương khi và chỉ khi* $\mathrm{a}_{11} > 0$ *và A nửa xác định dương khi và chỉ khi* $\mathrm{a}_{11} \geq 0$.

Chứng minh.Giả sử $y = (\mathrm{y}_1) \in \mathbb{R}^1$. Khi đó, $\mathrm{y}^\mathrm{T}\mathrm{A}\mathrm{y} = \mathrm{a}_{11}\mathrm{y}_1^2$. Vì thế $\mathrm{y}^\mathrm{T}\mathrm{A}\mathrm{y} > 0$ với mọi $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^1$, $y \neq 0$, khi và chỉ khi $\mathrm{a}_{11} > 0$, do đó A xác định dương khi và chỉ khi $\mathrm{a}_{11} > 0$. Cũng vậy, $\mathrm{y}^\mathrm{T}\mathrm{A}\mathrm{y} \geq 0$ với mọi $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^1$ khi và chỉ khi $\mathrm{a}_{11} \geq 0$, do đó A nửa xác định dương khi và chỉ khi $\mathrm{a}_{11} \geq 0$. ■

Kết quả 1.2. *Nếu Q là ma trận xác định dương (đối xứng hay không đối xứng) thì mọi ma trận con chính của Q đều xác định dương.*

Chứng minh. Xét ma trận con chính G xác định bởi tập chỉ số $\{1, 2\}$.

$$G = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}. \text{ Giả sử } z = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Lấy $y = (y_1, y_2, 0, 0, ..., 0)^T$. Khi đó $y^TQy = z^TGz$. Tuy nhiên, do Q xác định dương nên $y^TQy > 0$ với mọi $y \neq 0$. Do vậy $z^TGz > 0$ với mọi $\mathrm{z} \neq 0$. Vì thế G cũng xác định dương. Dùng lập luận tương tự có thể chứng minh rằng mọi ma trận con chính của Q cũng xác định dương. ■

Kết quả 1.3. *Nếu Q xác định dương thì* $\mathrm{q_{ii}} > 0$ *với mọi i.*

Chứng minh suy từ Kết quả 1.2

Kết quả 1.4. *Nếu Q là ma trận nửa xác định dương (đối xứng hay không đối xứng) thì mọi ma trận con chính của Q cũng nửa xác định dương.*

Chứng minh tương tự như trong chứng minh Kết quả 1.2.

Kết quả 1.5. *Nếu Q là ma trận nửa xác định dương thì* $\mathrm{q_{ii}} \geq 0$ *với mọi i.*

Chứng minh suy từ Kết quả 1.4.

Kết quả 1.6. *Cho Q là ma trận nửa xác định dương. Nếu* $\mathrm{q_{ii}} = 0$ *thì* $\mathrm{q_{ij}} + \mathrm{q_{ji}} = 0$ *với mọi j khi Q không đối xứng và* $\mathrm{q_{ij}} = \mathrm{q_{ji}} = 0$ *với mọi j khi Q đối xứng.*

Chứng minh. Để xác định, giả sử $\mathrm{q_{11}} = 0$ và giả sử $\mathrm{q_{12}} + \mathrm{q_{21}} \neq 0$. Theo kết quả 1.4, ma trận con chính:

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

phải nửa xác định dương, nghĩa là $\mathrm{q_{22}y_2^2} + (\mathrm{q_{12}} + \mathrm{q_{21}})\,\mathrm{y_1y_2} \geq 0$ với mọi $\mathrm{y_1, y_2}$. Do $\mathrm{q_{12}} + \mathrm{q_{21}} \neq 0$ nên nếu chọn $\mathrm{y_1} = (-\mathrm{q_{22}} - 1)\,/\,(\mathrm{q_{12}} + \mathrm{q_{21}})$ và $\mathrm{y_2} = 1$ thì bất đẳng thức trước đó trở thành $-1 \geq 0$, ta gặp mâu thuẫn. Vậy phải có $\mathrm{q_{12}} + \mathrm{q_{21}} = 0$.

Trường hợp Q đối xứng thì $\mathrm{q_{12}} = \mathrm{q_{21}}$. Theo trên $\mathrm{q_{12}} + \mathrm{q_{21}} = 0$. Từ đó suy ra $2\mathrm{q_{12}} = 2\mathrm{q_{21}} = 0$, tức $\mathrm{q_{12}} = \mathrm{q_{21}} = 0$. ■

Định nghĩa 1.4. (Bước xoay Gauss - Gaussian Pivot Step). Cho $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})$ là ma trận cấp $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$. Phần tử ở hàng r, cột s là $\mathrm{a_{rs}}$. Với $\mathrm{a_{rs}} \neq 0$, *bước xoay Gauss* biến đổi ma trận A theo công thức:

$$a_{\mathrm{ij}} \to a'_{\mathrm{ij}} = a_{\mathrm{ij}} - a_{rj} \times (a_{\mathrm{is}}/a_{rs}) \text{ với mọi } \mathrm{i} = \mathrm{r}+1, \ldots, m \text{ và mọi } \mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{n}$$

tức là trừ mỗi hàng $\mathrm{i} > \mathrm{r}$ một bội số thích hợp (cụ thể là $\mathrm{a_{is}/a_{rs}}$) của hàng r. Có thể thấy $\mathrm{a'_{is}} = 0$ với mọi $\mathrm{i} > \mathrm{r}$. Ở bước xoay này, hàng r gọi là *hàng xoay* (pivot row), cột s gọi là *cột xoay* (pivot column) và $\mathrm{a_{rs}}$ gọi là *phần tử trụ*(pivot element). Bước xoay Gauss này gọi tắt là *phép xoay* (r, s) trên A và nó chỉ thực hiện được khi $\mathrm{a_{rs}} \neq 0\,(\mathrm{r} < \mathrm{m})$.

Ví dụ 1.3. Phép xoay $(1, 2)$ ($\mathrm{a_{12}} = 2$ là *phần tử trụ*) trên ma trận A biến A thành B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kết quả 1.7. *Cho D là một ma trận vuông đối xứng cấp $n \geq 2$. Giả sử D xác định dương. Thực hiện phép xoay $(1,1)$ trên D để biến mọi phần tử ở cột 1, trừ phần tử đầu, thành 0. Ta nhận được ma trận E. Giả sử E_1 là ma trận con nhận được từ E bằng cách bỏ đi hàng 1 và cột 1. Khi đó, E_1 vẫn còn đối xứng và xác định dương.*

Ví dụ 1.4. Với phép xoay $(1,1)$ trên ma trận D vuông đối xứng xác định dương (cấp 3) ta nhận được ma trận E_1 vuông đối xứng xác định dương (cấp 2):

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kết quả 1.8. *Ma trận vuông Q là xác định dương (hay nửa xác định dương) khi và chỉ khi $\mathrm{Q} + \mathrm{Q}^{\mathrm{T}}$ xác định dương (hay nửa xác định dương).*

Chứng minh. Suy ra từ đẳng thức $\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{Q} + \mathrm{Q}^{\mathrm{T}}\right)\mathrm{x} = 2\mathrm{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\mathrm{x}$ ■

Kết quả 1.9. *Giả sử Q là ma trận vuông cấp n và A là ma trận cấp $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$. Khi đó ma trận vuông:*

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

cấp $(m+n)$ là nửa xác định dương khi và chỉ khi Q nửa xác định dương.

Chứng minh. Đặt $\mathrm{z} = (\mathrm{y}_1, ..., \mathrm{y}_\mathrm{n}, \mathrm{t}_1, ..., \mathrm{t}_\mathrm{m})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m+n}}$và $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, ..., \mathrm{y}_\mathrm{n})^{\mathrm{T}}$. Với mọi z ta có $\mathrm{z}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}\mathrm{z} = \mathrm{y}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\mathrm{y}$. Vì thế $\mathrm{z}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}\mathrm{z} \geq 0$ với mọi $\mathrm{z} \in \mathbb{R}^{\mathrm{m+n}}$ khi và chỉ khi $\mathrm{y}^{\mathrm{T}}\mathrm{Q}\mathrm{y} \geq 0$ với mọi $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, nghĩa là E nửa xác định dương khi và chỉ khi Q nửa xác định dương. ■

Kết quả 1.10. *Nếu B là ma trận vuông (cấp n) không suy biến thì ma trận $\mathrm{D} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}$ là ma trận đối xứng và xác định dương.*

Chứng minh. Tính đối xứng là do $\mathrm{D}^{\mathrm{T}} = \left(\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{B} = \mathrm{D}$. Với mọi $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathrm{y} \neq 0$, ta có $\mathrm{y}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\mathrm{y} = \mathrm{y}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}\right)\mathrm{y} = (\mathrm{B}\mathrm{y})^{\mathrm{T}}\mathrm{B}\mathrm{y} = ||\mathrm{B}\mathrm{y}||^2 > 0$ do $\mathrm{B}\mathrm{y} \neq 0$(B không suy biến và $\mathrm{y} \neq 0$ kéo theo $\mathrm{B}\mathrm{y} \neq 0$). Vì thế D xác định dương. ■

Kết quả 1.11. *Nếu A là một ma trận tùy ý (vuông hay chữ nhật) thì* $\mathrm{AA^T}$ *và* $\mathrm{A^TA}$ *là đối xứng và nửa xác định dương.*

Chứng minh. Tương tự như chứng minh Kết quả 1.10. ■

Ví dụ 1.5. Với ma trận A cho dưới đây thì $\mathrm{AA^T}$ xác định dương và $\mathrm{A^TA}$ nửa xác định dương

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{A^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{AA^T} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{A^TA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- *Nếu Q xác định dương thì nghịch đảo* $\mathrm{Q^{-1}}$ *tồn tại và xác định dương*
- Sau đây là một số kết quả liên quan đến định thức con chính của các ma trận xác định dương và nửa xác định dương.

Kết quả 1.12. *Cho Q là một ma trận xác định dương, đối xứng hay không đối xứng. Mọi định thức con chính của Q là số dương. Nói riêng, $detQ > 0$.*

Kết quả 1.13. *Cho Q là một ma trận nửa xác định dương, đối xứng hay không đối xứng. Mọi định thức con chính của Q không âm. Nói riêng, $det\mathrm{Q} \geq 0$.*

Kết quả 1.14. (Tiêu chuẩn Silvester).
a) Để cho ma trận vuông đối xứng Q là xác định dương thì điều kiện cần và đủ là mọi định thức con chính chủ đạo của Q dương, tức $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, trong đó

$$\Delta_1 = |\mathrm{q_{11}}|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_\mathrm{n} = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}.$$

b) Để cho ma trận vuông đối xứng Q là xác định âm thì điều kiện cần và đủ là các định thức con chính chủ đạo của Q luân phiên đổi dấu, trong đó định thức đầu tiên có dấu âm, tức là $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^\mathrm{n}\Delta_\mathrm{n} > 0$.