ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ THỊ KIM NGA

MỘT VÀI THUẬT TOÁN CHIẾU GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG ĐƠN ĐIỆU

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. LÊ DŨNG MƯU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn nghiêm túc và nhiệt tình của GS. TSKH. Lê Dũng Mưu (Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam). Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy và kính chúc thầy cùng gia đình luôn mạnh khỏe.

Tôi xin gửi lời cảm ơn các thầy cô giảng dạy tại Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam đã mang lại cho tôi nhiều kiến thức bổ ích và giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi chân thành cảm ơn các bạn đồng môn đã giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn này tại trường Đại học Khoa Học - Đại học Thái Nguyên.

Cuối cùng, con cảm ơn Bố Mẹ đã vất vả tạo mọi điều kiện cho con học tập và được kết quả như ngày hôm nay.

Thái Nguyên, tháng 4 - 2014

Người viết Luận văn

Lê Thị Kim Nga

Mở đầu

Bài toán cân bằng có nhiều ứng dụng trong khoa học, kỹ thuật và đời sống như: vật lý (đặc biệt là cơ học), hóa học, sinh học, nông nghiệp, quân sự, kinh tế, viễn thông... Bài toán cân bằng là bài toán tổng quát, nó bao gồm nhiều trường hợp riêng như: bài toán tối ưu, bài toán cân bằng Nash, bài toán điểm yên ngựa, bài toán bất đẳng thức biến phân... Do có ứng dụng rộng rãi trong thực tế nên nghiên cứu về bài toán cân bằng và đưa ra các thuật toán giải là cần thiết.

Luận văn này nhằm giới thiệu về bài toán cân bằng, một số bài toán quy được về bài toán cân bằng và phương pháp chiếu để giải bài toán cân bằng. Luận văn này gồm mục lục, phần kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1: Nhắc lại các khái niệm, kết quả cơ bản nhất về không gian Hilbert, tập lồi, hàm lồi, sẽ được sử dụng ở chương sau. Tiếp theo là giới thiệu về bài toán cân bằng và các trường hợp riêng của nó.

Chương 2: Ta tìm hiểu hai phương pháp chiếu để giải bài toán cân bằng đơn điệu. Trong phần này, trước hết trình bày về song hàm giả đơn điệu tiếp theo là phương pháp chiếu khoảng cách. Trong phương pháp chiếu khoảng cách ta tìm hiểu về hai phương pháp chiếu: phương pháp chiếu cơ bản, phương pháp chiếu tổng quát và thuật toán tương ứng.

Trong quá trình viết luận văn cũng như xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những sai sót. Tác giả mong nhận được sự đóng góp của quý thầy cô và bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Chương 1

Bài toán cân bằng đơn điệu

Trong chương này ta trình bày các khái niệm cơ bản về không gian *Hilbert*. Ta nhắc lại một số kiến thức cơ bản của giải tích lồi. Tiếp theo, ta phát biểu bài toán cân bằng và các trường hợp riêng của bài toán cân bằng. Kiến thức được trình bày trong chương này được tham khảo chủ yếu từ tài liệu [1], [2], [3].

1.1 Kiến thức cơ bản

1.1.1 Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1. *Cho H là một không gian tuyến tính trên trường số thực $\mathbb{R}$. Một tích vô hướng trong H là một ánh xạ được ký hiệu*

$$\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{R},$$

và có tính chất sau

1) $\langle x, x\rangle > 0$ *nếu* $x \neq 0$*;* $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\forall x \in H$;

2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\forall x, y \in H$;

3) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $\forall x, y, z \in H$;

4) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle, \forall x, y \in H$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

5) $\langle x, x\rangle = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$, $\forall x \in H$.

Tích vô hướng liên hệ với độ dài (chuẩn) của các véc-tơ bởi hệ thức (5).
Khi đó, không gian tuyến tính $H\langle .,. \rangle$ *được gọi là không gian tiền Hilbert.*

Định nghĩa 1.2. *Không gian đầy đủ là không gian mà mọi dãy Cauchy đều hội tụ.*

Định nghĩa 1.3. *Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.*

Ví dụ 1.1. Không gian $L^2(E,\mu)$ là không gian *Hilbert* với tích vô hướng

$$\langle x,y\rangle = \int_E x(t)y(t)d\mu.$$

Tích phân này tồn tại và hữu hạn vì

$$\int_E |xy| \le \Big(\int_E x^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\Big(\int_E y^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Ví dụ 1.2. Không gian $\mathbb{C}_{[a,b]}^{L^2}$ gồm tất cả các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$ với phép toán tuyến tính thông thường và với tích vô hướng

$$\langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

là không gian tiền *Hilbert* không đủ.

Ví dụ 1.3. Không gian l^2 với chuẩn

$$\|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty, x = (\xi_1, \xi_2..., \xi_n, ...)$$

là một không gian *Hilbert*.

Nhận xét 1.1. Không gian tiền *Hilbert* có tính chất sau

i) Tính chất hình bình hành

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big);$$

ii) Bất đẳng thức *Schwars*

$$\|\langle x,y\rangle\| \le \|x\|.\|y\|;$$

iii) Tích vô hướng $\langle x,y\rangle$ là một hàm số liên tục đối với biến x và y.

Ánh xạ co và nguyên lý điểm bất động

Định nghĩa 1.4. *Cho C là tập khác rỗng trong không gian tiền Hilbert thực H. Một hàm $f : C \to H$ gọi là ánh xạ co trên, nếu tồn tại $\theta < 1$ sao cho nếu $f(x)$ là phần tử ứng với x trong ánh xạ f thì với mọi $x_1, x_2 \in C$ ta có*

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \theta\rho(x_1, x_2),$$

trong đó $\rho(x, y) = \|x - y\|$ được gọi là "khoảng cách giữa x và y". Một phép ánh xạ f có thể có những điểm mà ảnh của nó trùng với chính nó: $f(x) = x$ được gọi là điểm bất động của ánh xạ.

Ví dụ 1.4. Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $f(x) = \frac{1}{2}x$ là ánh xạ co, với $\theta = \frac{1}{2}$.

Định lý 1.1. *(Định lý Banach) Mọi ánh xạ co P từ không gian Hilbert thực H vào bản thân nó đều có một điểm bất động duy nhất.*

Chứng minh. Lấy một điểm $x_0 \in H$ và những điểm

$$x_1 = Px_0, x_2 = Px_1, ..., x_n = Px_{n-1}, ...$$

Theo định nghĩa ánh xạ co

$$\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(Px_{n-1}, Px_n) \leq \theta\rho(x_{n-1}, x_n),$$

$$\rho(x_{n-1}, x_n) \leq \theta\rho(x_{n-2}, x_{n-1}),$$

$$.... \quad ... \quad ...$$

$$\rho(x_1, x_2) \leq \theta\rho(x_0, x_1),$$

từ đó suy ra với mọi n ta có

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \theta^n\rho(x_0, x_1).$$

Vậy khi $m > n$, ta có

$$
\begin{aligned}
\rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + \rho(x_{m-1}, x_m) \\
&\leq (\theta^n + \theta^{n+1} + ... + \theta^{m-1})\rho(x_0, x_1) \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty}(\theta^k)\rho(x_0, x_1) = \frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_0, x_1).
\end{aligned}
$$

Vì $\theta < 1$ nên $\rho(x_n, x_m) \to 0$ khi $n, m \to \infty$, tức là $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy trong H và vì H là không gian *Hilbert* nên $\{x_n\}$ phải dần tới một giới hạn x nào đó. Ta có $x_n = Px_{n-1}$ mà $x_n \to x,\ Px_{n-1} \to Px$ vì $\rho(Px_{n-1}, Px) \leq \theta\rho(x_{n-1}, x) \to 0$. Vậy $Px = x$, nghĩa là x là điểm bất động. Đó là điểm bất động duy nhất vì nếu y cũng là một điểm bất động thì

$$\rho(x, y) = \rho(Px, Py) \leq \theta\rho(x, y).$$

Với $\theta < 1$ điều này chỉ xảy ra nếu $\rho(x, y) = 0$ tức là $x = y$.

□

1.1.2 Kiến thức cơ bản về tập lồi và hàm lồi

Định nghĩa 1.5. *Cho dãy $\{x_n\}_{n\geq 0}$ và x_0 nằm trong không gian Hilbert thực H. Khi đó*

i) Dãy $\{x_n\}$ gọi là hội tụ mạnh tới x_0 và ký hiệu là $x_n \to x_0$ nếu

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x_0\| = 0;$$

ii) Dãy $\{x_n\}$ gọi là hội tụ yếu tới x_0 và ký hiệu là $x_n \rightharpoonup x_0$ nếu

$$\lim_{n\to+\infty} \langle w, x_n\rangle = \langle w, x_0\rangle, \forall w \in H;$$

iii) Điểm x_0 được gọi là điểm tụ mạnh (yếu) của dãy $\{x_n\}$ nếu từ dãy này có thể lấy ra một dãy hội tụ mạnh (yếu) đến x_0.

Mệnh đề 1.1. *i) Nếu một dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến x_0 thì $\{x_n\}$ cũng hội tụ yếu đến x_0;*

ii) Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu tới x_0 và $\lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x_0\|$ thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến x_0;

iii) Mọi dãy hội tụ mạnh (yếu) đều bị chặn và giới hạn tồn tại là duy nhất;

iv) Nếu không gian Hilbert thực H là hữu hạn chiều thì sự hội tụ mạnh, yếu là tương đương;

v) Nếu $\{x_n\}_{n\geq 0}$ là một dãy bị chặn trong không gian Hilbert H thì ta lấy ra được một dãy con từ dãy $\{x_n\}$ và dãy con này hội tụ yếu;

vi) Nếu $\{x_n\}_{n\geq 0}$ là một dãy bị chặn trong không gian Hilbert hữu hạn chiều H thì ta lấy ra được một dãy con hội tụ mạnh.

Định nghĩa 1.6. *Một đường thẳng đi qua hai điểm (hai véc-tơ) a, b trong không gian Hilbert thực H là tập hợp tất cả véc-tơ $x \in H$ có dạng*

$$\{x \in H : x = \alpha a + \beta b,\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\, \alpha + \beta = 1\}.$$

Định nghĩa 1.7. *Đoạn thẳng nối hai điểm a và b trong không gian Hilbert thực H là tập hợp các véc-tơ x có dạng*

$$\{x \in H : x = \alpha a + \beta b,\, \alpha \geq 0,\, \beta \geq 0,\, \alpha + \beta = 1\}.$$

Định nghĩa 1.8. *Cho tập C trong không gian Hilbert thực H, ta xét toán tử $F : C \to C$ được gọi là toán tử đơn điệu nếu*

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \geq 0,\, \forall x, y \in C.$$

Ví dụ 1.5. Cho toán tử F được xác định trên $\mathbb{R}$ như sau

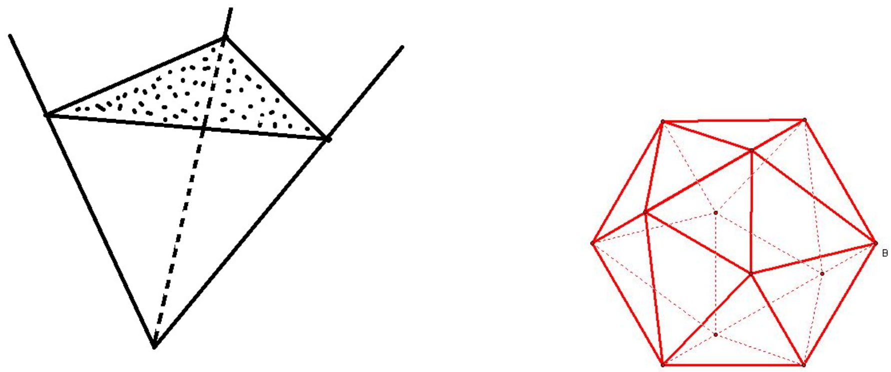
$$F(x) = x,\, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Khi đó F là toán tử đơn điệu vì với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$ ta có

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle = (x - y)^2 \geq 0,\, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Định nghĩa 1.9. *Trong không gian Hilbert thực H một tập $D \subseteq H$ được gọi là một tập lồi nếu D chứa mọi đoạn thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó. Tức là D lồi khi và chỉ khi*

$$\forall x, y \in H, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in D.$$



Hình 1.1: Đa diện lồi.

Định nghĩa 1.10. *Tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ gọi là một tập affine (hay đa tạp tuyến tính) nếu $(1-\lambda)a + \lambda b \in M$ với mọi $a \in M, b \in M$ với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$, tức là M chứa trọn cả đường thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó.*

Nhận xét 1.2. Nếu M là một tập affine và $a \in \mathbb{R}^n$ thì

i) $a + M = a + x : x \in M$ cũng là một tập affine.

ii) M là một tập affine chứa gốc khi và chỉ khi M là một không gian con, nghĩa là nếu $a, b \in M$ thì mọi điểm $\lambda a + \mu b$ cũng thuộc M với $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.11. *Điểm $x \in H$ có dạng $x = \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + ... + \lambda_k a^k$ với $a^i \in \mathbb{R}^n$ và $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k = 1$ gọi là một tổ hợp affine của các điểm a^1, a^2, ..., a^k.*

Nhận xét 1.3. *i)* M là một tập affine khi và chỉ khi M chứa mọi tổ hợp affine các phần tử của nó.

*ii)*Giao của một họ bất kỳ các tập affine cũng là một tập affine.
Cho E là một tập bất kỳ trong $\mathbb{R}^n$, có ít nhất một tập affine chứa E, cụ thể là $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.12. *Giao của tất cả các tập affine chứa E gọi là bao affine của E và ký hiệu là $affE$. Đó là tập affine nhỏ nhất chứa E.*
Ta thấy $x \in affE$ khi và chỉ khi x là một tổ hợp affine của các phần tử thuộc E.

Định nghĩa 1.13. *Một tập D được gọi là nón nếu*

$$\forall \lambda > 0, \forall x \in D \Rightarrow \lambda x \in D.$$