ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHAN THỊ MƯỜI

BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÀ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA NỬA NHÓM KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Lời cảm ơn

Trong suốt quá trình làm luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nghiêm túc của GS.TS Nguyễn Bường- Viện Công nghệ Thông tin, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và kính chúc thầy luôn luôn mạnh khỏe.

Tôi cũng xin cảm ơn các quý thầy, cô giảng dạy tại Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đã mang đến cho tôi nhiều kiến thức bổ ích trong khoa học và cuộc sống.

Tôi xin chân thành cảm ơn các bạn đồng môn đã giúp đỡ tôi trong thời gian học tập tại Đại học Thái Nguyên và trong quá trình hoàn thành luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 3 - 2014

Người viết Luận văn

Phan Thị Mười

Mở đầu

Bài toán cân bằng và điểm bất động của nửa nhóm ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert rất quan trọng trong toán học, có nhiều ứng dụng trong khoa học, vật lí, tối ưu và kinh tế... đã có nhiều nhà toán học nghiên cứu về vấn đề này. Năm 1912 nhà toán học Hà Lan Luizen Egbereisjan Brouwer nghiên cứu và đưa ra nguyên lí tìm điểm bất động Brouwer: Một ánh xạ liên tục f từ hình cầu đóng trong $\mathbb{R}^n$ vào chính nó phải có điểm bất động, tức là tồn tại x sao cho $f(x) = x$. Đến năm 1930 Schauder, 1935 Tikhonov đã mở rộng nguyên lí này thành dạng tổng quát: Một ánh xạ liên tục f từ một tập lồi com-pắc trong không gian tô-pô lồi địa phương Hausdorff vào chính nó phải có điểm bất động. Gọi là nguyên lí Brouwer-Schauder-Tikhonov.

Cho đến nay các nhà toán học cả trong và ngoài nước vẫn đang tiếp tục nghiên cứu mở rộng định lí này. Trong khuôn khổ của luận văn này chúng tôi xin được trình bày một đề tài "Bài toán cân bằng và điểm bất động của nửa nhóm không giãn trong không gian Hilbert". Luận văn được tổng hợp từ bài báo *"Các định lí hội tụ mạnh giải bài toán cân bằng và điểm bất động của nửa nhóm ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert"* của GS.TS Nguyễn Bường cùng với cộng sự Nguyễn Đình Dương.

Mục đích của luận văn này là giới thiệu các định lí hội tụ mạnh giải bài toán cân bằng và điểm bất động của nửa nhóm ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Trong đó giới thiệu hai phương pháp lặp để tìm nghiệm của bài toán cân bằng và điểm bất động của nửa nhóm ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Sau đó chứng minh định lí về sự hội tụ mạnh của phép lặp, kết hợp giữa kết quả của Comberttes, Hirstoaga và kết quả của Nakajo, Takahashi. Từ kết quả đã chứng minh nhận được hai hệ quả là sự cải tiến và mở rộng các kết quả của Comberttes, Hirstoaga và Tada, Takahashi.

Bố cục luận văn gồm 2 chương:

Chương I. Một số khái niệm và vấn đề cơ bản.

Chương II. Nghiệm của bài toán cân bằng và điểm bất động của nửa nhóm ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của GS.TS Nguyễn Bường. Mặc dù tác giả đã hết sức cố gắng nhưng do vấn đề được nghiên cứu là khá phức tạp và kinh nghiệm nghiên cứu còn hạn chế nên khó tránh khỏi thiếu sót. Trong quá trình viết luận văn cũng như sử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi sai sót, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của quý thầy cô và bạn đọc.

Thái Nguyên, tháng 3 - 2014

Tác giả

Phan Thị Mười

Chương 1

Các khái niệm và vấn đề cơ bản

Chương I gồm 3 mục.

Mục 1.1 Giới thiệu định nghĩa không gian Hilbert, nửa nhóm ánh xạ không giãn và một số khái niệm, tính chất liên quan.

Mục 1.2 Giới thiệu bài toán cân bằng và phương pháp lặp Mann để giải bài toán cân bằng.

Mục 1.3 Nêu một số bổ đề và định lý cần thiết để giải bài toán cân bằng.

1.1 Một số khái niệm cơ bản

Không gian Hilbert và một số tính chất

Định nghĩa 1.1. *Cho H là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Một tích vô hướng trong H là một ánh xạ $\langle .,. \rangle$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) $\langle x, x \rangle > 0, \ \forall x \neq 0; \ \langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0;$

ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \ \forall x, y \in H;$

iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \ \forall x, y \in H, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

iv) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \ \forall x, y, z \in H.$

Không gian tuyến tính H cùng với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$ được gọi là không gian tiền Hilbert. Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.

Ví dụ 1.1. *Chuẩn của phần tử x trong H kí hiệu là $\|x\|$ và được xác định bằng $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.*

Không gian $\mathbb{R}^n$ có tích vô hướng là:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i,$$
$$x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$
$$y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ví dụ 1.2. *Không gian $L^2[a, b]$ là không gian Hilbert với tích vô hướng được xác định:*

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx, \ \ \forall \varphi, \psi \in L^2[a, b].$$

Định nghĩa 1.2. *Tập hợp tất cả các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên H gọi là không gian liên hợp (không gian đối ngẫu của H) và kí hiệu là H^*.*

Định nghĩa 1.3. *Cho H là không gian Hilbert, một dãy $\{x_n\}$ gồm các phần tử $x_n \in H$ gọi là hội tụ yếu tới phần tử $x \in H$ (kí hiệu: $x_n \rightharpoonup x$), Nếu $< \phi, x_n > \longrightarrow < \phi, x >$ với mỗi $\phi \in H^*$ (H^* là không gian liên hợp của H).*

Định nghĩa 1.4. *Cho H là không gian Hilbert, một dãy $\{x_n\}$ gồm các phần tử $x_n \in H$ gọi là hội tụ mạnh đến phần tử $x \in H$ nếu $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$ khi $n \longrightarrow \infty$. Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh đến phần tử $x \in H$ thì:*

(i) Mỗi dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ cũng hội tụ tới x;

(ii) Mỗi dãy $\{\|x_n - \xi\|\}$ bị chặn với $\xi \in H$.

Định nghĩa 1.5. *Dãy $\{x_n\} \subset H$ được gọi là Cauchy, nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $n_0(\varepsilon)$ sao cho: $\|x_m - x_m\| < \varepsilon$ với mọi $m \geq n_0(\varepsilon), n \geq n_0(\varepsilon)$.*

Định nghĩa 1.6. *Cho không gian Hilbert thực H, một hàm $f : H \to \mathbb{R}$. Khi đó* *i) Một hàm f xác định trên tập H được gọi là nửa liên tục dưới tại điểm x_0 thuộc H nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$, với mọi x thuộc H thoả mãn $\|x - x_0\| < \delta$.*

ii) Hàm f được gọi là nửa liên tục trên trên H tại $x_0 \in H$ nếu hàm $-f$ nửa liên tục dưới trên H tại $x_0 \in H$.

iii) Hàm f được gọi là liên tục trên H tại điểm $x_0 \in H$ nếu hàm f vừa nửa liên tục dưới trên H tại điểm $x_0 \in H$ và vừa liên tục trên trên H tại điểm $x_0 \in H$.

iv) Hàm f được gọi là liên tục (nửa liên tục) trên H nếu hàm f liên tục (nửa liên tục) tại mọi điểm trên H.

Định nghĩa 1.7. *Cho H là không gian Hilbert, X là tập con khác rỗng của H.*

(i) X được gọi là tập lồi nếu với $\forall x, y \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$ ta có:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in X.$$

(ii) X được gọi là compact nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ đều chứa dãy con hội tụ đến một điểm thuộc X.

Định nghĩa 1.8. *Cho f là một hàm lồi trên tập lồi C. Một véc-tơ $y^* \in H$ được gọi là dưới đạo hàm của f tại $x^* \in C$ nếu*

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle y^*, x - x^* \rangle, \forall x \in C.$$

Tập tất cả các điểm y^* thỏa mãn bất đẳng thức trên được ký hiệu là $\partial f(x^*)$. Hàm f được gọi là khả dưới vi phân tại x^* nếu $\partial f(x^*) \neq \emptyset$.

Định lý 1.1. *Mỗi tập con đóng và bị chặn X của một không gian Hilbert là compact yếu, tức là với mỗi dãy bị chặn trong X có thể trích ra được một dãy con hội tụ yếu tới một phần tử của không gian này. Tập con X của không gian Hilbert H được gọi là đóng yếu, nếu $\{x_n \rightharpoonup x\}$, thì $x \in X$.*

Định lý 1.2. *Định lý Mazur:*

Mỗi tập con lồi đóng của một không gian Hilbert là đóng yếu.

Định nghĩa 1.9. *Một phiếm hàm φ xác định trên H được gọi là lồi, nếu:*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \ \ \forall x, y \in H, \ \ t \in [0,1].$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$, thì φ được gọi là lồi chặt.
Nếu tồn tại một hàm liên tục tăng:

$$\gamma : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ \gamma(0) = 0,$$

sao cho:

$$\varphi(tx+(1-t)y) \leq t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y)-t(1-t)\gamma(\|x-y\|), \ \ \forall x, y \in H, \ \ t \in [0,1]$$

thì φ được gọi là lồi đều và hàm $\gamma(t)$ gọi là modun lồi của φ.
Nếu $\gamma(t) = ct^2, \ \ c > 0$ thì phiếm hàm φ được gọi là lồi mạnh.

Định nghĩa 1.10. *Một phiếm hàm φ được gọi là nửa liên tục dưới tại $x_0 \in H$, nếu với mỗi dãy $\{x_n\} \subset H$ sao cho $x_n \longrightarrow x$ ta có:*

$$\varphi(x_0) \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf \varphi(x_n).$$

Nếu $x_n \rightharpoonup x_0$ và $\varphi(x_0) \leq \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \inf \varphi(x_n)$, thì φ được gọi là nửa liên tục yếu tại $x_0 \in H$.

Định lý 1.3. *(i) Nếu $\varphi(x)$ là một phiếm hàm lồi trên H thì $\varphi'(x)$ thỏa mãn bất đẳng thức:*

$$\langle \varphi'(x) - \varphi'(y), x - y \rangle \geq 0, \ \ \forall x, y \in H.$$

(ii) Nếu $\varphi(x)$ là một phiếm hàm lồi đều trên H thì $\varphi'(x)$ thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\langle \varphi'(x) - \varphi'(y), x - y \rangle \geq 2\gamma(\|x - y\|), \ \ \forall x, y \in H.$$

(iii) Nếu $\varphi(x)$ là một phiếm hàm lồi mạnh trên H thì $\varphi'(x)$ thỏa mãn bất đẳng thức:

$$\langle \varphi'(x) - \varphi'(y), x - y \rangle \geq 2\gamma(\|x - y\|^2), \ \ \forall x, y \in H.$$

Định nghĩa 1.11. *Toán tử $A : H \longrightarrow H$ được gọi là tuyến tính nếu:*

(i) $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2,\ \forall x_1, x_2 \in H,$

(ii) $A(\alpha x) = \alpha Ax,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ x \in H.$

Định nghĩa 1.12. *Toán tử tuyến tính A được gọi là bị chặn, nếu tồn tại một hằng số $M > 0$ sao cho $\|Ax\| \leq M\|x\|$. Giá trị M nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức đó được gọi là chuẩn của A và kí hiệu bởi $\|A\|$.*

Định nghĩa 1.13. *Toán tử $A : X \longrightarrow Y$ được gọi là compact trên X, nếu nó biến mỗi tập bị chặn trong X thành một tập compact trong Y.*

Định nghĩa 1.14. *Toán tử $A : X \longrightarrow Y$ được gọi là:*

(i) liên tục tại $x_0 \in X$ nếu với mỗi dãy con $\{x_n\} \subset X$ sao cho: $Ax \longrightarrow Ax_0$, khi $x_n \longrightarrow x_0$.

(ii) h- liên tục tại $x_0 \in X$ nếu $A(x_0 + t_n h) \rightharpoonup Ax_0$, khi $t_n \longrightarrow 0$ với mỗi véc tơ $h \in X$.

(iii) d- liên tục tại $x_0 \in X$ nếu với mỗi dãy con $\{x_n\} \subset X$ sao cho khi $x_n \longrightarrow x_0$ thì $Ax_n \rightharpoonup Ax_0$.

(iv) liên tục Lipschitz nếu $\exists L > 0$ sao cho:

$$\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|,\ \forall x, y \in X.$$

Định nghĩa 1.15. *Cho X là không gian Hilbert và X^* là không gian liên hợp của X. Toán tử $A : X \longrightarrow 2^{X^*}$ được gọi là d-đơn điệu trên X nếu tồn tại một hàm không âm $d(t)$, không giảm với $t \geq 0$ và $d(0) = 0$ thỏa mãn:*

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq (d(\|x\|) - d(\|y\|))(\|x\| - \|y\|), \forall x, y \in X.$$

Định nghĩa 1.16. *Cho X là không gian Hilbert và X^* là không gian liên hợp của X. Toán tử $A : X \longrightarrow 2^{X^*}$ được gọi là đơn điệu đều trên X nếu tồn tại một hàm không âm $\delta(t)$, không giảm với $t \geq 0$ và $\delta(0) = 0$ thỏa mãn:*

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \delta(\|x\| - \|y\|),\ \forall x, y \in X.$$