ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

-----✍📖✍-----

NGUYỄN THỊ THU HƯƠNG

ĐA THỨC CHEBYSHEV VÀ CÁC BÀI TOÁN XẤP XỈ ĐA THỨC LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60.46.01.12

\

Thái Nguyên – Năm 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

-----✍📖✍-----

NGUYỄN THỊ THU HƯƠNG

ĐA THỨC CHEBYSHEV VÀ CÁC BÀI TOÁN XẤP XỈ ĐA THỨC LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60.46.01.12

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu

Thái Nguyên – Năm 2014

Mục lục

Mở đầu

Một trong những dạng toán thường gặp trong các đề thi olympic sinh viên quốc gia và quốc tế và thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng là các bài toán có liên quan đến đa thức. Đặc biệt, các bài toán về đa thức Chebyshev là một trong những dạng bài tập rất khó và gây cho học sinh nhiều lúng túng dẫn đến các cách giải không chặt chẽ, thiếu chính xác. Nguyên nhân chính là phần đa thức Chebyshev và các tính chất liên quan không được giảng dạy đầy đủ trong các trường phổ thông và đại học, hơn nữa tài liệu tham khảo về nội dung này chưa nhiều.

Để đáp ứng nhu cầu giảng dạy, học tập và góp phần nhỏ bé khắc phục sự thiếu vắng nói trên, luận văn "Đa thức Chebyshev và các bài toán xấp xỉ đa thức liên quan" chủ yếu dựa trên các kiến thưc cơ bản về đa thức Chebyshev, kết hợp với sử dụng các kiến thức tổng hợp để sáng tác, chọn lọc, phân loại các bài toán về đa thức Chebyshev.

Luận văn gồm phần mở đầu, 3 chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị.

Chương này trình bày về định nghĩa, tính chất của đa thức đại số, đa thức lượng giác hay các kiến thức về xấp xỉ hàm và xấp xỉ đa thức. Đây là những kiến thức cơ bản nhất để có thể bắt đầu tìm hiểu về đa thức Chebyshev và từ đó có thể giải được các bài toán về đa thức Chebyshev.

Chương 2. Đa thức Chebyshev và xấp xỉ Chebyshev.

Nội dung chính của chương này là trình bày các khái niệm cần thiết và chứng minh một số kết quả cơ bản của đa thức Chebyshev. Trước hết, tác giả nêu bài toán đặc biệt, ứng dụng các kết quả chung đã nêu trên để dẫn đến định nghĩa đa thức Chebyshev và các tính chất cơ bản của đa thức Chebyshev. Sau đó là xét bài toán xấp xỉ Chebyshev và một số định lý liên quan.

Chương 3. Một số dạng toán liên quan.

Hệ thống hóa các dạng bài toán ứng dụng về đa thức Chebyshev như các bài toán chứng minh đẳng thức và bất đẳng thức với nút nội suy Chebyshev, bài toán về Định lý Bertein - Markov và bài toán xác định đa thức.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQGHN, người Thầy đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình hoàn thành bản luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Toán, Phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên cùng các thầy, cô giáo đã tham gia giảng dạy khóa học.

Tuy đã có nhiều cố gắng nhưng do thời gian và khả năng có hạn nên các vấn đề trong luận văn chưa được trình bày sâu sắc và không thể tránh khỏi những sai sót trong cách trình bày. Rất vui lòng và mong muốn được sự góp ý xây dựng của thầy cô và bạn bè.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2014

Tác giả

Nguyễn Thị Thu Hương

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Đa thức đại số và các tính chất liên quan

Định nghĩa 1.1 (xem [1]-[2])**.** Cho A là một vành giao hoán có đơn vị. Ta nói đa thức bậc n biến x là một biểu thức có dạng

$$P_(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

trong đó $a_i \in A$ được gọi là hệ số, a_n là hệ số bậc cao nhất và a_0 là hệ số tự do của đa thức.

Nếu $a_i = 0, i = 0, 1, \ldots, n-1$ và $a_0 \neq 0$ thì ta có bậc của đa thức là 0.

Nếu $a_i = 0, i = 0, 1, \ldots, n$ thì ta coi bậc của đa thức là $-\infty$ và gọi là đa thức 0. Tập hợp tất cả các đa thức lấy trong vành A được kí hiệu là $A[x]$.

Khi $A = K$ là một trường thì $K[x]$ là một vành giao hoán có đơn vị. Ta thường xét $A = \mathbb{Z}$ hoặc $A = \mathbb{Q}$ hoặc $A = \mathbb{R}$ hoặc $A = \mathbb{C}$. Khi đó ta có các vành đa thức tương ứng là $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.

Tính chất 1.1. Cho hai đa thức

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

$$g(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0.$$

Ký hiệu $k = \max(m, n)$. Khi đó có thể viết

$$f(x) = a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

$$g(x) = b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1x + b_0,$$

trong đó $a_k = 0$, ứng với $k > n$ và $b_k = 0$ ứng với $k > m$.

Ta định nghĩa các phép tính số học như sau.

$$f(x) + g(x) := (a_k + b_k)x^k + (a_{k-1} + b_{k-1})x^k + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0),$$
$$f(x) - g(x) := (a_k - b_k)x^k + (a_{k-1} - b_{k-1})x^k + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0),$$
$$f(x).g(x) := c_{n+m}x^{n+m} + c_{n+m-1}x^{n+m-1} + \cdots + c_1x + c_0,$$

trong đó $c_j = a_0b_j + a_1b_{j-1} + \cdots + a_jb_0, j = 0, 1, \ldots, n+m$.

Định lý 1.1 (xem [1]-[2])**.** Giả sử A là một trường, $f(x)$ và $g(x)(\neq 0)$ là hai đa thức của vành $A[x]$, thế thì bao giờ cũng có hai đa thức duy nhất $q(x)$ và $r(x) \in A[x]$ sao cho $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$ với $\deg r(x) < \deg g(x)$.

Nếu $r(x) = 0$ thì ta nói $f(x)$ chia hết cho $g(x)$.

Định lý 1.2 (xem [1]-[2])**.** Giả sử A là một trường, $a \in A, f(x) \in A[x]$. Dư số của phép chia $f(x)$ cho $(x-a)$ chính là $f(a)$.

Định lý 1.3. Số $a \in A$ là nghiệm của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chi hết cho $(x-a)$.

Giả sử A là một trường, $a \in A, f(x) \in A[x]$ và m là một số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 1. Khi đó a là nghiệm bội cấp m của $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $(x-a)^m$ và $f(x)$ không chia hết cho $(x-a)^{m+1}$.

Trong trường hợp $m = 1$ thì ta gọi a là nghiệm đơn còn khi $m = 2$ thì a được gọi là nghiệm kép. Số nghiệm của một đa thức là tổng số nghiệm của đa thức đó, kể cả bội của các nghiệm (nếu có). Vì vậy, người ta coi một đa thức có một nghiệm bội cấp m như là một đa thức có m nghiệm trùng nhau.

Định lý 1.4 (Định lý Vieete)**.** a) Giả sử phương trình

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{1.1}$$

có n nghiệm (thực hoặc phức) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thì

$$\begin{cases} E_1(x) := x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ E_2(x) := x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ E_n(x) := x_1x_2x_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases} \tag{1.2}$$

b) Ngược lại, nếu các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn hệ (1.2) thì chúng là nghiệm của phương trình (1.1). Hệ (1.2) có n thành phần và ở vế trái của thành phần thứ k có C_n^k số hạng.
c) Các hàm $E_1(x), E_2(x), \ldots, E_n(x)$ được gọi là hàm đa thức đối xứng sơ cấp Vieete bậc $1, 2, \ldots, n$ tương ứng.

Định lý 1.5 (xem [1]-[2])**.** Mỗi đa thức trong $\mathbb{R}[x]$ bậc n đều có không quá n nghiệm thực.

Hệ quả 1.1. Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không.

Hệ quả 1.2. Hai đa thức có bậc không vượt quá n mà nhận $(n+1)$ giá trị bằng nhau tại $(n+1)$ giá trị khác nhau của đối số thì đồng nhất bằng nhau.

Định lý 1.6 (Định lý cơ bản của đại số)**.** Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ bậc n có đúng n nghiệm (tính cả bội của nghiệm).

Định lý 1.7 (xem [1]-[2])**.** Mọi đa thức $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ bậc n và có hệ số chính (hệ số bậc cao nhất), $a_n \neq 0$ đều có thể phân tích duy nhất thành nhân tử dạng

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{m}(x - d_i) \prod_{k=1}^{s}(x^2 + b_k x + c_k),$$

với $d_i, b_k, c_k \in \mathbb{R}, 2s + m = n, b_k^2 - 4c_k < 0, m, n \in \mathbb{N}^*$.

Định lý 1.8 (xem [1]-[2])**.** Điều kiện cần và đủ để hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ nguyên tố cùng nhau là tồn tại cặp đa thức $u(x)$ và $v(x)$ sao cho

$$P(x)u(x) + Q(x)v(x) \equiv 1.$$

Nếu hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$ không đồng nhất bằng 0 và có ước chung $d(x)$ là đa thức chia hết cho tất cả các ước chung khác thì $d(x)$ được gọi là ước chung lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$. Cũng như vậy ta có ước chung lớn nhất của bộ nhiều đa thức.

1.2 Đa thức lượng giác và các tính chất liên quan

Định nghĩa 1.2. Biểu thức:

$$A_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.3}$$

trong đó $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}\,(k \in \{1, 2, \dots, n\}); |a_n| + |b_n| \neq 0\,(n \in \mathbb{N}^*)$ được gọi là đa thức lượng giác bậc n (cấp n) với các hệ số $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}\,(k \in \{1, 2, \dots, n\})$.

Định nghĩa 1.3. Nếu trong đa thức (1.3) tất cả các hệ số $b_k\,(k \in \{1, 2, \dots, n\})$ đều bằng 0 thì ta có đa thức lượng giác thuần cos cấp n.

$$B_n(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx\,(a_n \neq 0). \tag{1.4}$$

Định nghĩa 1.4. Nếu trong đa thức (1.4) tất cả các hệ số $a_k\,(k \in \{1, 2, \dots, n\})$ đều bằng 0 thì ta có đa thức lượng giác thuần sin cấp n.

$$B_n(x) = b_0 + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + b_n \sin nx\,(b_n \neq 0,\ b_0 = a_0). \tag{1.5}$$

Tính chất 1.2. Cho $A_n(x)$, $B_m(x)$ là hai đa thức lượng giác có cấp theo thứ tự là n, m. Trong đó n, m là 2 số nguyên dương. Khi đó:

+ Tổng $A_n(x) + B_m(x)$ là đa thức lượng giác có cấp nhỏ hơn hoặc bằng $max\{m, n\}$.

+ Tích $A_n(x) \cdot B_m(x)$ là đa thức lượng giác có cấp bằng $m + n$.

+ Khi $a_0 = 0$, đa thức lượng giác $A_n(x)$ có ít nhất một nghiệm.

+ Mọi đa thức lượng giác $A_n(x)$ đều tồn tại đa thức $P_n(t)$ và $Q_{n-1}(t)$ để $A_n(x) = P_n(\cos x) + \sin x Q_{n-1}(\cos x)$.

+ Mọi đa thức lượng giác $B_n(x)$ dạng (1.4) đều tồn tại đa thức $P_n(t)$ để $B_n(x) = P_n(\cos x)$.

+ Mọi đa thức lượng giác $C_n(x)$ dạng (1.5) đều tồn tại đa thức $P_{n-1}(t)$ để $C_n(x) = b_0 + \sin x P_{n-1}(\cos x)$.

1.3 Xấp xỉ hàm số và xấp xỉ đa thức

Định lý 1.9 (xem [5]). Giả sử X là không gian tuyến tính định chuẩn, X_0 là không gian con hữu hạn chiều của X và $x \in X$ là một phần tử cố định. Khi đó, với mỗi phần tử $x \in X$ tồn tại một phần tử $x_0 \in X_0$ sao cho

$$\| x - x_0 \| \leq \| x - y \|, \quad \forall y \in X_0.$$

Bài toán 1.1. Giả sử X là không gian tuyến tính định chuẩn, X_0 là không gian con hữu hạn chiều của X và $x \in X$ là một phần tử cố định. Hãy xác định phần tử $x_0 \in X_0$ sao cho: $\| x - x_0 \| \leq \| x - y \|$ với mọi $y \in X_0$.

Trong bài toán trên đại lượng $\| x - y \|$ được gọi là độ lệch giữa x và y, còn $\min\limits_{y \in X_0} \| x - y \|$ được gọi là đại lượng xấp xỉ tốt nhất của x trong X_0.

Phần tử $x_0 \in X_0$ mà với nó độ lệch đạt cực tiểu,

$$\| x - x_0 \| = \min_{y \in X_0} \| x - y \|$$

được gọi là xấp xỉ tốt nhất của x trong X_0.

Định nghĩa 1.5. Giả sử hàm số $f(x)$ được xấp xỉ bởi đa thức $P_n(x)$. Gọi $P[f, P, n] = |f(x) - P^n(x)|$ là độ lệch của phép xấp xỉ.

Ta cần xác định $P(x)$ và n sao cho $P[f, P, n]$ nhỏ nhất trên một đoạn $[a, b]$ cho trước.

Khi đó $P_n(x)$ được gọi là đa thức xấp xỉ tốt nhất của $f(x)$ trên $[a, b]$ và được kí hiệu là: $f(x) \approx P_n(x)$. Nếu $f(x)$ khả vi $(n + 1)$ lần thì có thể sử dụng công thức khai triển Taylor tại $x = 0$ ta có

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k + R(x, n),$$

với phần dư $R(x, n) = 0(x^n)$. Như vậy

$$f(x) \approx P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k + R(x, n).$$

Tuy nhiên lớp các hàm khả vi $(n + 1)$ lần dùng để xấp xỉ bởi đa thức là hẹp. Song đối với các hàm số liên tục trên $[a, b]$ vẫn có các định lý tương tự về xấp xỉ chúng bởi đa thức. Ta có thể xây dựng các đa thức xấp xỉ thông qua các công thức nội suy hay công thức tính độ lệch sai số đối với các xấp xỉ đó.

Bài toán 1.2 (Nội suy Lagrange)**.** Cho hàm số $f(x)$ và cho tập X gồm $(n+1)$ điểm phân biệt $x_j, (x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$ trong tập xác định của hàm số $f(x)$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một đa thức $P_n(x)$, bậc không quá n sao cho

$$P(x_j) = f(x_j)\,(j = 0, 1, \ldots, n).$$

Mặt khác, nếu đa thức $P_n(x)$ có dạng:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

thì các hệ số a_k được xác định một cách duy nhất từ hệ phương trình

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x_j^k = f(x_j)\,(j = 0, 1, \ldots, n).$$

Lời giải. Ta thấy $P_n(x)$ được xác định bởi công thức nội suy Lagrange, đó là đa thức bậc không vượt quá n.

Ngoài ra do $|f(x) - P_n(x)| = 0,\ \forall x \in X$ nên $P_n(x)$ còn gọi là đa thức xấp xỉ tốt nhất của $f(x)$ trên X. Do:

$$\max_{x \in X} |f(x) - P_n(x)| = 0$$

nên nếu tồn tại đa thức $Q_n(x)$ là xấp xỉ tốt nhất của $f(x)$ trên X thì cũng phải có $f(x) = Q_n(x),\ \forall x \in X$.

Hai đa thức $P_n(x)$ và $Q_n(x)$ có bậc không vượt quá n và nhận các giá trị trùng nhau tại $(n+1)$ điểm khác nhau nên chúng đồng nhất bằng nhau. Do đó, đa thức $P_n(x)$ là duy nhất trong số các đa thức bậc không vượt quá n.