ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

**TRẦN THỊ MINH TÂM**

# QUỸ TÍCH COHEN - MACAULAY CỦA CÁC MÔĐUN

**LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2014**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM**

---

TRẦN THỊ MINH TÂM

# QUỸ TÍCH COHEN - MACAULAY CỦA CÁC MÔĐUN

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số: 60. 46. 01. 04

**LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC**

Người hướng dẫn khoa học: TS. NGUYỄN VĂN HOÀNG

THÁI NGUYÊN - 2014

**Xác nhận của khoa chuyên môn** **Xác nhận của cán bộ hướng dẫn**

# Mục lục

# Mở đầu

Giả sử $M$ là môđun hữu hạn sinh trên vành Noether $A$. Quỹ tích Cohen-Macaulay của $M$ kí hiệu là $\mathrm{CM}(M)$, nó được xác định bởi công thức

$$\mathrm{CM}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid M_{\mathfrak{p}} \text{ là } A_{\mathfrak{p}}-\text{môđun Cohen-Macaulay}\}.$$

Ta dễ thấy quỹ tích Cohen-Macaulay của một môđun Cohen-Macaulay là $\mathrm{Spec}(A)$, và của một môđun Cohen-Macaulay suy rộng $M$ trên vành địa phương $(A,\mathfrak{m})$ chứa tập $\mathrm{Spec}(A) \setminus \{\mathfrak{m}\}$. Vì thế trong những trường hợp này, $\mathrm{CM}(M)$ là tập con mở của $\mathrm{Spec}(A)$ đối với tôpô Zariski. Tính chất tôpô của quỹ tích Cohen-Macaulay của các môđun là một công cụ quan trọng. T. Kawasaki [9, Định lý 8.3] đã chỉ ra rằng khi vành $A$ là catenary (xem Định nghĩa 1.2.5), thì tính mở của $\mathrm{CM}(B)$ (của bất kì $A-$đại số hữu hạn $B$) là một giả thiết quan trọng để nghiên cứu tính hữu hạn của các phức Cousin $\mathscr{C}_A(M)$ (xem Định nghĩa 2.2.2) của $A-$môđun hữu hạn sinh đẳng chiều $M$ (nghĩa là $\dim M = \dim A/\mathfrak{p}$ với mọi phần tử $\mathfrak{p}$ cực tiểu của $\mathrm{Supp}(M)$).

Quỹ tích Cohen-Macaulay của môđun được nghiên cứu bởi nhiều tác giả, chẳng hạn A. Grothendick [7] đã khẳng định rằng $\mathrm{CM}(M)$ là một tập con mở của $\mathrm{Spec}(A)$ khi $A$ là một vành hoàn hảo (excellent ring). Trong [13], C. Rotthaus-L. Sega đã nghiên cứu các quỹ tích Cohen-Macaulay của các môđun phân bậc trên một vành Noether phân bậc thuần nhất $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ khi xét như là các $A_0-$môđun. Trong [8], R. Hartshorne đã chỉ ra $\mathrm{CM}(A)$ là tập mở khi $A$ có phức đối ngẫu. Tiếp đến, M.T. Dibaei [3, Hệ quả 2.3] đã chỉ ra rằng $\mathrm{CM}(A)$ là tập mở khi $A$ là vành địa phương với tất cả các thớ hình thức của nó là Cohen-Macaulay và thỏa mãn điều kiện Serre $(S_2)$.

Mặt khác, R. Sharp-P. Schenzel trong [18, Ví dụ 4.4] đã chỉ ra rằng $M$ là môđun Cohen-Macaulay nếu và chỉ nếu phức Cousin $\mathscr{C}_A(M)$ là một dãy khớp. Vì vậy $\mathrm{CM}(M) = \mathrm{Spec}(A) \setminus \cup_{i \geq -1} \mathrm{Supp}_A(H^i(\mathscr{C}_A(M)))$, trong đó đó $H^i(\mathscr{C}_A(M))$ là ký hiệu của môđun đối đồng điều thứ $i$ của phức Cousin $\mathscr{C}_A(M)$. Từ đó suy ra rằng $\mathrm{CM}(M)$ là tập mở khi mà phức Cousin $\mathscr{C}_A(M)$ có các môđun đối đồng điều hữu hạn sinh trên $A$. Các tác giả trong [4] đã chỉ ra rằng nếu các môđun $H^i(\mathscr{C}_A(M))$ hữu hạn sinh trên $A$ thì $M$ có linh hóa tử đều đối đồng điều địa phương (tức là, tồn tại phần tử $x \in A \setminus \cup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}_A(M)} \mathfrak{p}$ sao cho $xH^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ với mọi $i < \dim_A(M)$ và mọi iđêan cực đại $\mathfrak{m}$ của $A$). Gần đây, năm 2011, M.T. Dibaei-R. Jafari [5] tiếp tục nghiên cứu về tính mở của quỹ tích Cohen-Macaulay của các môđun hữu hạn sinh $M$ trên vành địa phương Noether $(A, \mathfrak{m})$. Trong mối quan hệ này, họ cũng nghiên cứu về một số vành có các thớ hình thức (trên một số các iđêan nguyên tố đặc biệt) là Cohen-Macaulay.

Mục đích của luận văn này là trình bày chi tiết lại những nghiên cứu của M.T. Dibaei-R. Jafari năm 2011 như vừa nêu trên. Nói cách khác, uận văn trình bày chi tiết lại các chứng minh của bài báo [5] M.T. Dibaei and R. Jafari, *Cohen-Macaulay Loci of Modules*, Commutative Algebra, **39** (2011), 3681-3697. Bên cạnh đó để việc trình bày có hệ thống và rõ ràng hơn, luận văn cũng bổ sung một số kiến thức từ những bài báo khác, chẳng hạn của T. Kawasaki [9], C. Zhou [19],....

Luận văn được chia làm 4 chương. Chương 1 trình bày các kiến thức cơ sở để chứng minh các kết quả chính của luận văn. Chương 2 mô tả về tập các iđêan nguyên tố gắn kết $\mathrm{Att}_A(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M))$ của môđun đối đồng điều địa phương thứ $i$ của $M$ trên một vành địa phương $(A, \mathfrak{m})$ dưới điều kiện phức Cousin $\mathscr{C}(M)$ của $M$ là hữu hạn (Định lý 2.3.3 và Hệ quả 2.3.6). Chương 3 trình bày về quỹ tích Cohen-Macaulay của $M$. Bổ đề 3.2.3 chỉ ra rằng để nghiên cứu tính mở của $\mathrm{CM}(M)$ trong trường hợp $A/(0 :_A M)$ là catenary thì chỉ cần xét với giả thiết $M$ là đẳng chiều. Hơn nữa, một đặc trưng mới của các vành Cohen-Macaulay suy rộng liên quan đến linh hóa tử đều đối đồng điều địa phương cũng được đưa ra (Hệ quả 3.3.9). Vì quỹ tích không Cohen-Macaulay của $M$ đóng nếu và chỉ nếu tập các phần tử tối tiểu của nó là hữu hạn, nên dưới một số giả thiết trung gian chúng ta chứng minh được rằng $\mathrm{Min}(\text{non-CM}(M))$ là tập con của tập $\bigcup_{i\leq \dim M} \mathrm{Att}_A(\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)) \cup$ $\text{non-CM}(A)$ (Định lý 3.3.10). Như một hệ quả ta suy ra rằng quỹ tích Cohen-Macaulay của bất kỳ môđun hữu hạn sinh nào trên vành Noether địa phương $(A,\mathfrak{m})$ là một tập con mở của $\mathrm{Spec}(A)$ nếu $A$ là catenary và $\mathrm{CM}(A)$ là một tập hữu hạn (Hệ quả 3.3.11). Chương 4 chứng minh rằng $M$ có linh hóa tử đều đối đồng điều địa phương nếu và chỉ nếu $\widehat{M}$ đẳng chiều và các thớ hình thức trên các phần tử tối tiểu của $\mathrm{Supp}_A(M)$ là Cohen-Macaulay. Kết quả là ta có Hệ quả 4.1.3 nói về các điều kiện tương đương với một vành là catenary phổ dụng và mọi thớ hình thức là Cohen-Macaulay.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của Tiến sĩ NGUYỄN VĂN HOÀNG - Giảng viên Trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy, người đã hướng dẫn tôi cách đọc tài liệu, nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức hoàn thành luận văn này. Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các thầy cô giáo của: Viện Toán học và Đại học Thái Nguyên những người đã tận tình giảng dạy và khích lệ, động viên tôi vượt qua những khó khăn trong học tập. Tôi xin cảm ơn ban lãnh đạo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Khoa Sau đại học, Sở GD-ĐT Thái Nguyên, Ban Giám hiệu và Tổ Toán Tin - Trường THPT Lê Hồng Phong (Phổ Yên-Thái Nguyên) đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập. Cuối cùng tôi xin cảm ơn bạn bè, người thân đã giúp đỡ, động viên, ủng hộ tôi để tôi có thể hoàn thành tốt khóa học của mình.

*Thái Nguyên, ngày ..... tháng ..... năm 2014*

TÁC GIẢ

# Chương 1

# Kiến thức chuẩn bị

Chương này nhằm đưa ra một số kiến thức chuẩn bị giúp cho việc trình bày có hệ thống và những kiến thức đó thực cần thiết phục vụ cho chứng minh các kết quả ở những chương sau. Chương này ta luôn giả thiết $A$ là vành giao hoán có đơn vị.

## 1.1 Tập iđêan nguyên tố liên kết và tập giá của môđun

**Kí hiệu 1.1.1.** Cho $M$ là một $A-$môđun. Linh hóa tử của $M$, ký hiệu là $\mathrm{ann}_A(M)$ hoặc $(0:_A M)$, đó là tập hợp $\{a \in A \mid aM = 0\}$ (nó cũng là một iđêan của $A$). Cho $x \in M$, khi đó ta gọi linh hóa tử của $x$, kí hiệu là $\mathrm{ann}_A(x)$ hay $(0:_A x)$, đó là iđêan $\mathrm{ann}_A(Ax)$.

**Định nghĩa 1.1.2.** *(Iđêan nguyên tố liên kết)* Cho $M$ là một $A-$môđun và $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Ta nói $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố liên kết của $M$ nếu tồn tại $0 \neq x \in M$ sao cho $\mathfrak{p} = \mathrm{ann}_A(x)$. Hơn nữa, tập tất cả các iđêan nguyên tố liên kết của $A-$môđun $M$ được ký hiệu là $\mathrm{Ass}_A(M)$ hoặc $\mathrm{Ass}(M)$.

**Nhận xét 1.1.3.** Cho $M$ là $A-$môđun và $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Khi đó, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$ khi và chỉ khi tồn tại một môđun con $N$ của $M$ sao cho $A/\mathfrak{p} \cong N$. Nếu giả thiết thêm $A$ là vành Noether và $M$ là $A-$môđun khác 0. Khi đó mọi phần tử tối đại của tập $\Sigma = \{\mathrm{ann}_A(x) \mid 0 \neq x \in M\}$ đều nằm trong tập $\mathrm{Ass}_A(M)$. Đặc biệt, ta suy ra rằng $M \neq 0$ khi và chỉ khi $\mathrm{Ass}_A(M) \neq \emptyset$.

**Định nghĩa 1.1.4.** *(Giá của môđun)* Cho $M$ là $R-$môđun. Ta gọi tập hợp $\mathrm{Supp}_A(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ là tập giá của $M$. Ta cũng kí hiệu $\mathrm{Min}_A(M)$ là tập tất cả các phần tử tối tiểu của tập $\operatorname{Supp}(M)$.

**Mệnh đề 1.1.5.** *Cho $A$ là vành Noether và*

$$0 \to N \to M \to P \to 0$$

*là một dãy khớp ngắn các $A-$môđun. Khi đó ta có các phát biểu*

*i)* $\operatorname{Ass}_A(N) \subseteq \operatorname{Ass}_A(M) \subseteq \operatorname{Ass}_A(N) \cup \operatorname{Ass}_A(P)$.

*ii)* $\operatorname{Supp}_A(M) = \operatorname{Supp}_A(N) \cup \operatorname{Supp}_A(P)$.

**Mệnh đề 1.1.6.** *Cho $A$ là một vành Noether và $M$ là $A-$môđun hữu hạn sinh khác* $0$. *Khi đó tồn tại dãy các môđun con của $M$ dạng $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ và có các* $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec}(A)$ *sao cho $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$ với mọi $i = 1, \cdots, n$.*

**Mệnh đề 1.1.7.** *Cho $A$ là vành Noether và $M$ là $A-$môđun. Khi đó ta có*

*i)* $\operatorname{Min}_A(M) \subseteq \operatorname{Ass}_A(M) \subseteq \operatorname{Supp}_A(M)$.

*ii) Nếu $M$ là môđun hữu hạn sinh trên $A$ thì $|\operatorname{Ass}_A(M)| < \infty$.*

## 1.2 Chiều và độ cao

**Định nghĩa 1.2.1.** *(Chiều của vành và môđun)* Cho $A$ là một vành giao hoán, một dãy giảm thực sự các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \mathfrak{p}_n$ của vành $A$ được gọi là một xích nguyên tố có độ dài $n$. Cận trên của độ dài tất cả các xích nguyên tố trong $A$ được gọi là chiều Krull của $A$, hay chiều của vành $A$, ký hiệu là $\dim A$. Giả sử $M$ là một $A-$môđun. Khi đó, chiều của $M$, ký hiệu là $\dim M$ được xác định bởi $\dim M = \dim(A/\operatorname{ann}(M))$.

**Định nghĩa 1.2.2.** *(Độ cao của iđêan)* Cho $A$ là một vành giao hoán và $\mathfrak{p}$ là iđêan nguyên tố của $A$. Chiều dài lớn nhất của mọi dãy giảm thực sự các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_r$ xuất phát từ $\mathfrak{p}$, được gọi là độ cao của $\mathfrak{p}$, ký hiệu là $\operatorname{ht}(\mathfrak{p})$. Cho $I$ là một iđêan của $A$. Độ cao của $I$, ký hiệu là $\operatorname{ht}(I)$, được cho bởi $\operatorname{ht}(I) = \inf\{\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)\}$ trong đó $\mathrm{V}(I)$ là tập các iđêan nguyên tố của $A$ chứa $I$.