ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

------------- -------------

LÊ THỊ MAI QUỲNH

ĐẶC TRƯNG CỦA MÔĐUN COHEN–MACAULAY DÃY QUA TÍNH CHẤT PHÂN TÍCH THAM SỐ

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 60.46.05

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS.TSKH NGUYỄN TỰ CƯỜNG

THÁI NGUYÊN NĂM 2008

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.lrc-tnu.edu.vn

MỤC LỤC

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH Nguyễn Tự Cường. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc nhất của mình đến thầy.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới PGS.TS Lê Thị Thanh Nhàn, PGS.TS Nguyễn Quốc Thắng cùng toàn thể các thầy cô giáo ở Khoa Toán và Phòng Đào tạo sau Đại học trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập tại trường. Tôi xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ nhiệt thành và chu đáo của NCS Trần Nguyên An, bạn Hoàng Lê Trường phòng đại số trong quá trình thực hiện luận văn này.

LỜI NÓI ĐẦU

Cho R là vành địa phương Noether với iđêan tối đại $\mathfrak{m}$ và M là $R-$ môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d$. Cho $\underline{x} = x_1, \ldots, x_d$ là hệ tham số của M và $\mathfrak{q} = (x_1, \ldots, x_d)$ là iđêan tham số của M sinh bởi $\underline{x}$. Với mỗi số nguyên dương n, ký hiệu

$$\Lambda_{d,n} = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \alpha_i \geq 1, \forall 1 \leq i \leq d, \sum_{i=1}^{d} \alpha_i = d + n - 1\}$$

và $\mathfrak{q}(\alpha) = (x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_d^{\alpha_d})$ với $\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \Lambda_{d,n}$.

Ta nói rằng hệ tham số $\underline{x}$ có tính chất phân tích tham số nếu đẳng thức $\mathfrak{q}^n M = \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda_{d,n}} \mathfrak{q}(\alpha) M$ đúng với $\forall n \geq 1$. Vậy khi nào một hệ tham số cho trước của M có tính chất phân tích tham số. Vấn đề này Heinzer, Ratliff và Shah đã chứng minh rằng một dãy các phần tử $R-$ chính quy luôn có tính chất phân tích tham số. Sau đó, Goto và Shimoda đã chỉ ra rằng điều ngược lại cũng đúng khi mỗi phần tử của dãy không là ước của không trong R. Hơn nữa, họ còn đưa ra một đặc trưng khác của R với $\dim R \geq 2$, trong đó mọi hệ tham số của R có tính chất phân tích tham số. Ta nói môđun M là môđun Cohen-Macaulay dãy khi và chỉ khi tồn tại một hệ tham số $\underline{x}$ nào đó sao cho $\underline{x}$ có tính chất phân tích tham số. Bây giờ, ta hạn chế sự quan tâm của câu hỏi trên cho hệ tham số tốt của M. Khi đó một môđun Cohen-Macaulay dãy có thể được đặc trưng bởi tính chất phân tích tham số của một hệ tham số tốt như thế nào. Nội dung đó được trình bài trong bài báo *Parametric decomposition of powers of parameter ideals and sequentially Cohen-Macaulay modules* của tác giả Nguyễn Tự Cường và Hoàng Lê Trường. Bài báo sẽ ra ở tạp chí " Proc. Amer. Math. Soc."

Mục đích của luận văn này là trình bày lại một cách hệ thống và chi tiết kết quả của bài báo trên. Luận văn được chia làm 2 chương.

Chương 1 "Kiến thức chuẩn bị" là chương giới thiệu một số kiến thức cơ bản về đại số giao hoán như hệ tham số, dãy chính quy, môđun Cohen-Macaulay, môđun Cohen-Macaulay dãy.

Chương 2 "Phân tích tham số và môđun Cohen-Macaulay dãy" trình bày một số bổ đề từ đó đi đến định lý chính của chương nói về đặc trưng của môđun Cohen-Macaulay dãy qua phân tích tham số và hệ quả của nó. Định lý phát biểu rằng

Định lý 2.1.6. *Cho* $(R, \mathfrak{m})$ *là vành địa phương Noether.* M *là* $R-$ *môđun hữa hạn sinh. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*
(i) M *là môđun Cohen-Macaulay dãy.*
(ii) Mọi hệ tham số tốt của M *có tính chất phân tích tham số.*
(iii) Tồn tại hệ tham số tốt của M *có tính chất phân tích tham số.*

Ngoài ra chương này còn trình bày mối quan hệ giữa môđun Cohen-Macaulay dãy M và biểu thức của hàm Hilbert-Samuel thông qua định lý

Định lý 2.2.3. *Cho* $\mathfrak{D} : D_0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_t = M$ *là lọc chiều của* M *và đặt* $\mathfrak{D}_\mathfrak{i} = D_i/D_{i-1}$ *với mọi* $i = 1, \ldots, t, \mathfrak{D}_\mathfrak{o} = D_0$. *Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*
(i) M *là môđun Cohen-Macaulay dãy.*
(ii) Với bất kỳ iđêan tham số tốt $\mathfrak{q}$ *của* M, *đẳng thức*

$$l(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) = \sum_{i=0}^{t} \binom{n+d_i}{d_i} l(\mathfrak{D}_\mathfrak{i}/\mathfrak{q}\mathfrak{D}_\mathfrak{i})$$

đúng với mọi $n \geq 0$.
(iii) Tồn tại iđêan tham số tốt $\mathfrak{q}$ *của* M *sao cho đẳng thức*

$$l(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) = \sum_{i=0}^{t} \binom{n+d_i}{d_i} l(\mathfrak{D}_\mathfrak{i}/\mathfrak{q}\mathfrak{D}_\mathfrak{i})$$

đúng với mọi $n \geq 0$.

Phần cuối cùng của chương sẽ xây dựng ví dụ nhằm làm sáng tỏ các kết quả chính đã nêu ở trên.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Mục đích của chương này là nhắc lại một số kiến thức cơ bản về đại số giao hoán được sử dụng trong luận văn bao gồm định nghĩa, các mệnh đề và bổ đề về hệ tham số, dãy chính quy, môđun Cohen-Macaulay, môđun Cohen-Macaulay dãy.

1.1 Hệ tham số

Trong phần này ta sẽ đưa ra khái niệm và một số tính chất cơ bản về hệ tham số, đây là một khái niệm quan trọng xuyên suốt quá trình thực hiện luận văn này.

1.1.1 Định nghĩa. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương Noether, M là $R-$ môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d$. Tập các phần tử $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$, $x_i \in \mathfrak{m}$, $\forall i = 1, \ldots, d$ thoả mãn $l_R(M/\underline{x}M) < \infty$ được gọi là một *hệ tham số* của M.

Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương Noether, M là $R-$ môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d$. Mệnh đề sau đây nêu lên một số tính chất cơ bản của hệ tham số.

1.1.2 Mệnh đề. *[1, Mệnh đề A.4] Cho* $x_1, x_2, \ldots, x_t \in \mathfrak{m}$ *khi đó*

$$\dim(M/(x_1, \ldots, x_t)M) \geq \dim M - t.$$

Đẳng thức sảy ra khi và chỉ khi $x_1, x_2, \ldots, x_t$ *là một phần của hệ tham số của* M*.*

1.1.3 Mệnh đề. *[8, Chú ý 15.20] Nếu* $x_1, \ldots, x_d$ *là hệ tham số của* M *thì với mọi số nguyên dương* $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ *ta có* $x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_d^{\alpha_d}$ *cũng là hệ tham số của* M*.*

Nhận xét.

(1) Cho $x \in \mathfrak{m}$ khi đó x là một phần tử của hệ tham số của M khi và chỉ khi $x \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R$ sao cho $dim R/\mathfrak{p} = d$.

(2) Cho $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ xác định bởi

$$x_{i+1} \notin \mathfrak{p}, \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R(M/(x_1, \ldots, x_i)M), \dim R/\mathfrak{p} = d - i$$

với $i = 0, \ldots, d-1$. Khi đó $\{x_1, \ldots, x_d\}$ là hệ tham số của M.

Tiếp theo ta sẽ đưa ra định nghĩa về hàm Hilbert-Samuel và định lý đa thức Hilbert, đây là một định lý nổi tiếng và có ứng dụng nhiều trong đại số giao hoán. Trong luận văn này ta chỉ nhắc lại định nghĩa và định lý dùng cho chương sau mà không chứng minh.

1.1.4 Định nghĩa. Cho M là môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương Noether $(R, \mathfrak{m})$ với $\dim M = d$, $\mathfrak{q}$ là iđêan định nghĩa của M (tức là $l(M/\mathfrak{q}M) < \infty$). Khi đó ta định nghĩa một hàm số gọi là *hàm Hilber-Samuel*

$$F_{\mathfrak{q},M}(n) = l(M/\mathfrak{q}^{n+1}M).$$

1.1.5 Mệnh đề. *[7, Định lý 13.2] Cho $R = \bigoplus_{t \geq 0} R_t$ là vành phân bậc Noether. R_0 là vành Artin và M là R- môđun phân bậc hữa hạn sinh. Giả sử rằng $R = R_0[x_1, \dots, x_r]$ và x_i bậc d_i khi đó$F_{\mathfrak{q},M}(n)$ là một hàm hữu tỷ của n hơn nữa tồn tại đa thức $P_{\mathfrak{q},M}(n)$ với hệ số hữu tỷ bậc d sao cho với n đủ lớn thì*

$$F_{\mathfrak{q},M}(n) = P_{\mathfrak{q},M}(n).$$

và tồn tại những số nguyên $e_0(\mathfrak{q}, M)(> 0), e_1(\mathfrak{q}, M), \dots, e_d(\mathfrak{q}, M)$ sao cho

$$P_{\mathfrak{q},M}(n) = e_0(\mathfrak{q}, M) \quad \binom{n+d}{d} + e_1(\mathfrak{q}, M) \quad \binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + e_d(\mathfrak{q}, M).$$

Số $e_0(\mathfrak{q}, M)$ được gọi là số bội Zaziski-Samuel. Khi $\mathfrak{q}$ sinh bởi một hệ tham số $\underline{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ ta ký hiệu $e_0(\mathfrak{q}, M) = e_(\underline{x}, M)$.

1.2 Dãy chính quy và môđun Cohen-Macaulay

Trong phần này ta sẽ trình bày một số khái niệm về dãy chính quy, đó là khái niệm cơ bản để định nghĩa độ sâu của một môđun từ đó đưa đến định nghĩa của vành và môđun Cohen-Macaulay.

1.2.1 Định nghĩa. Cho R là vành giao hoán và M là $R-$ môđun. Một phần tử $x \in R$ được gọi là $M-$ *chính quy* nếu $0 :_M x = 0$, tức là $xa \neq 0$ với $\forall a \in M, a \neq 0$. Một dãy các phần tử $x_1, \dots, x_n$ của R được gọi là $M-$*dãy chính quy* nếu $(x_1, \dots, x_n)M \neq M$ và x_i là $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M-$ chính quy với mọi $i = 1, \dots, n$.

Các mệnh đề sau đây nêu lên các tính chất cơ bản của dãy chính quy.

1.2.2 Mệnh đề. *[8, Bổ đề 16.4] Cho M là $R-$ môđun khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

(i) Dãy $x_1, \ldots, x_n$ là dãy $M-$ chính quy.

(ii) Dãy $x_1, \ldots, x_i$ là dãy $M-$ chính quy và $x_{i+1}, \ldots, x_n$ là dãy $M/(x_1, \ldots, x_i)M-$ chính quy với mọi $1 \leq i \leq n-1$.

1.2.3 Mệnh đề. *[7, Định lý 16.1] Nếu $x_1, \ldots, x_n$ là dãy $M-$ chính quy thì với mọi số nguyên dương $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ta có $\{x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}\}$ cũng là dãy $M-$ chính quy.*

1.2.4 Mệnh đề. *[8, Định lý 16.9] Nếu $x_1, \ldots, x_n$ là dãy $M-$ chính quy thì với mọi hoán vị của các phần tử $x_1, \ldots, x_n$ ta vẫn được một dãy $M-$ chính quy.*

1.2.5 Mệnh đề. *[1, Mệnh đề 1.2.12] Nếu M là $R-$ môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương Noether và $x_1, \ldots, x_t$ là dãy $M-$ chính quy thì $x_1, \ldots, x_t$ là một phần của hệ tham số của M.*

Với định nghĩa về dãy chính quy nêu trên cho phép đi đến khái niệm độ sâu của một môđun, để từ đó đi đến khái niệm môđun Cohen-Macaulay.

1.2.6 Định nghĩa. Cho I là iđêan của vành R, M là $R-$ môđun hữu hạn sinh sao cho $M \neq IM$. Khi đó độ dài cực đại của dãy $M-$ chính quy của I gọi là *độ sâu* của iđêan I đối với $R-$ môđun M, kí hiệu $\operatorname{depth} R(I, M)$. Nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương Noether, ta có thể kí hiệu độ sâu của $R-$ môđun M là $\operatorname{depth}_R M$ hoặc có thể đơn giản hơn là $\operatorname{depth} M$.

1.2.7 Mệnh đề. *[1, Mệnh đề 1.2.13] Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương Noether, M là $R-$ môđun hữu hạn sinh. Ta có khẳng định sau.*
$\operatorname{depth} M \leq \dim R/\mathfrak{p} \leq \dim M, \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M.$

Và tiếp theo ta nhắc lại khái niệm môđun Cohen- Macaulay.

1.2.8 Định nghĩa. Môđun M được gọi là *môđun Cohen-Macaulay* nếu $M = 0$ hoặc $M \neq 0$ và $\operatorname{depth} M = \dim M$. Vành R gọi là *vành Cohen-Macaulay* nếu nó là $R-$ môđun Cohen-Macaulay.

Mệnh đề sau nêu lên các đặc trưng cơ bản của môđun Cohen-Macaulay.

1.2.9 Mệnh đề. *[7, Định lý 17.3] (1) Nếu M là môđun Cohen-Macaulay thì với $\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ ta có $\dim R/\mathfrak{p} = \dim M$.*
(2) Nếu $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ là dãy $M-$ chính quy thì M là môđun Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $M/(x_1, \ldots, x_d)M$ là môđun Cohen-Macaulay.

1.2.10 Mệnh đề. *[7, Chú ý 136] Nếu M là môđun Cohen-Macaulay thì mọi hệ tham số của M là dãy $M-$ chính quy.*

1.2.11 Bổ đề. *[3, Bổ đề 2.2] Cho N là môđun con của M thoả mãn $\dim N < \dim M$ và M/N là môđun Cohen-Macaulay. Cho $x_1, \ldots, x_i$ là một phần của hệ tham số của M khi đó $(x_1, \ldots, x_i)M \cap N = (x_1, \ldots, x_i)N$.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo i.
Với $i = 1$ ta phải chứng minh $x_1M \cap N = x_1N$. Ta luôn có $x_1N \subseteq x_1M \cap N$ ta chứng minh $x_1M \cap N \subseteq x_1N$. Thật vậy, lấy $y \in x_1M \cap N$ khi đó $y \in x_1M$ và $y = x_1m$ với $m \in M$ suy ra $y = x_1m \in N$ hay $x_1m + N = \overline{0} + N$ trong M/N tức $x_1(m + N) = \overline{0}$ suy ra $m + N = \overline{0}$ hay $m \in N$. Do đó $y = x_1m \in x_1N$
Giả sử $i > 1$. Ta luôn có $(x_1, \ldots, x_i)N \subseteq (x_1, \ldots, x_i)M \cap N$ (1).
Lấy $a \in (x_1, \ldots, x_i)M \cap N$ khi đó $a = x_1a_1 + \cdots + x_ia_i$ trong đó $a_j \in M$ với mọi $j = 1, \ldots, i$ vì $a \in N$ nên $a_i \in (N + (x_1, \ldots, x_{i-1})M) : x_i$. Mặt khác, vì dãy $x_1, \ldots, x_i$ là $M/N-$ chính quy và

$$(N + (x_1, \ldots, x_{i-1})M) :_M x_i = N + (x_1, \ldots, x_{i-1})M$$