

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG ANH TÚ

PHƯƠNG PHÁP LẬP MỚI GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN
TÍNH LỚN VÀ THỪA

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐẶNG ANH TÚ

**PHƯƠNG PHÁP LẬP MỚI GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN
TÍNH LỚN VÀ THỪA**

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. Lê Thanh Huệ

THÁI NGUYÊN - 2014

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU	1
1.Lý do chọn đề tài.....	1
2.Mục đích của đề tài.	2
3. Phạm vi nghiên cứu.....	2
4. Nội dung nghiên cứu của đề tài.....	3
5. Phương pháp nghiên cứu.....	3
6. Bố cục của đề tài.	3
CHƯƠNG I: CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH	5
I.1 Hệ phương trình tuyến tính.....	5
I.1.1 Hệ phương trình tuyến tính tổng quát.....	5
I.1.2 Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.	6
I.1.3 Các hệ phương trình tương đương.....	6
I.1.4 Các dạng ma trận, dạng vectơ của hệ phương trình tuyến tính.	7
I.2. Phương pháp tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính.	8
CHƯƠNG II : PHƯƠNG PHÁP LẬP	12
II.1 Các phương pháp giải trực tiếp.	12
<i>II.1 Sự thay đổi thuật toán trong tính toán cỡ lớn.</i>	<i>12</i>
<i>II.2. Những khó khăn của các phương pháp giải trực tiếp.</i>	<i>13</i>
<i>II.2.1 Phương pháp khử Gauss.</i>	<i>13</i>
<i>II.2.2. Phương pháp nhân tử hóa Cholesky</i>	<i>14</i>
<i>II.2.3 Vấn đề Fill – in (suy giảm độ thưa).....</i>	<i>15</i>
<i>II.2.4. Vấn đề truy cập đối với ma trận.....</i>	<i>18</i>
II. 3. Các phương pháp lập cơ bản	18
<i>II.3.1 Tách ma trận.....</i>	<i>19</i>

II. 3.2 Phép lặp Jacobi	22
II.3.3 Phép lặp Gauss-Seidel.....	24
II.4. Phương pháp nói lỏng.....	25
II.4.1 Phương pháp trên – nói lỏng liên tiếp	25
II.5. Các phương pháp lặp dựa trên phép chiếu	26
II.5.1 phép chiếu song song.....	26
II.5.2 Phương pháp chiếu Kaczmarz.....	27
II.5.3 Phương pháp chiếu đồng thời của Cimmino.....	30
CHƯƠNG III. PHƯƠNG PHÁP LẶP MỚI TÌM NGHIỆM HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH.....	33
III.1. Phương pháp lặp cho hệ phương trình tuyến tính.....	33
III.2. Phát biểu bài toán.....	35
III.3 Cơ sở lý thuyết của thuật toán.....	36
III.4. Mô tả thuật toán.....	41
III.5. Tính toán thử nghiệm.....	43
Kết luận.....	45
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	47
PHỤ LỤC.....	49

MỘT SỐ CÁC KÝ HIỆU VÀ ĐỊNH NGHĨA

Cho \mathbb{R}^n là không gian Euclid. Ta sử dụng các ký hiệu và khác niệm:

- $x \in \mathbb{R}^n$ là véc tơ cột, x^T là véc tơ hàng.
- Với $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, chuẩn của véc tơ x , ký hiệu là $\|x\|$ được định nghĩa

$$\text{bởi: } \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

- Tích vô hướng của hai véc tơ $x, y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, ở đây

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

- Ma trận A cấp $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Các ký hiệu $\det(A), A^{-1}, A^T, R(A), N(A), r(A)$ lần lượt là định thức, nghịch đảo, chuyển vị, ảnh, hạch và hạng của ma trận A .

- Phép chiếu

a. *Định nghĩa phép chiếu:* Giả sử cho trước điểm $x \in \mathbb{R}^n$ và tập lồi đóng C khác rỗng.

Hình chiếu của x lên C , ký hiệu $P_C x$ xác định như sau:

- $P_C x \in C$
- $\|x - P_C x\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|$

b. *Tính chất của phép chiếu*: Phép chiếu xác định như trên có các tính chất quan trọng sau:

- i) $P_C \circ P_C = P_C$
- ii) Tính chất duy nhất: điểm duy nhất P_y được đặc trưng bởi $P_y \in C$ và $\langle C - P_y, y - P_y \rangle \leq 0$
- iii) P là ánh xạ không dẫn.

Vài trường hợp cụ thể:

- C là hình cầu đơn vị: $C = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Khi đó $P_C x = x$, nếu $x \in C$:

$P_C x = x / \|x\|$, và trường hợp khác.

- C là orthant không âm: $C = \{x \in X : x \geq 0\}$. Khi đó $P_C x = x^+$.
- C là siêu phẳng: $C = \{x \in X; \langle a, x \rangle = b\}$, ở đây $a \neq 0$ và $b \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$P_C x = x - \frac{\langle a, x \rangle - b}{\|a\|^2} a$$

- C là không gian con: $C = \text{span } \{a_1, \dots, a_n\}$, ở đó a_i là các véc tơ cột độc lập tuyến tính của ma trận A . Khi đó: $P_C x = A (A^* A)^{-1} A^* x$

Các trường hợp còn lại với $1 < m < n - 1$ là bài toán khó tương đương với việc giải một hệ đại số tuyến tính.

DANH MỤC HÌNH VẼ - BẢNG BIỂU

Hình 1: Phép chiếu Kaczmarz trong không gian 2 chiều

Hình 2: Mô tả ý tưởng thuật toán

Hình 3: Minh họa bài toán bổ trợ

Bảng 1: Kết quả tính toán trên một vài bộ dữ liệu chuẩn.

MỞ ĐẦU

1.Lý do chọn đề tài.

Trong suốt thời gian qua luôn luôn có cuộc cạnh tranh liên tục giữa các phương pháp lập và các phương pháp giải trực tiếp các bài toán cỡ lớn xuất hiện trong thực tiễn. Ở một lớp bài toán này thì phương pháp giải trực tiếp chiếm ưu thế, ở một lớp bài toán khác, các phương pháp lập lại tỏ ra hiệu quả hơn. Có những bài toán do kích cỡ số liệu tương chừng như chỉ có thể sử dụng các phương pháp lập, nhưng rồi sự tiến bộ về khả năng tính toán và lưu trữ vượt trội của máy tính đã cho phép các phương pháp trực tiếp đua tranh.

Nhu cầu tìm kiếm lời giải của hệ phương trình tuyến tính như một công đoạn tính toán, xuất hiện rất thường xuyên trong quá trình tìm lời giải cho nhiều bài toán lý thuyết và thực tiễn trong khoa học kỹ thuật, trong các công trình nghiên cứu khoa học, bài toán xử lý ảnh, bài toán tối ưu trong kỹ thuật, trong kinh tế, ... Bởi vậy, nghiên cứu cải tiến các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính lớn và thừa xuất hiện trong các tính toán ứng dụng thực tế là một vấn đề quan trọng trong khoa học tính toán. Do đó việc tìm kiếm các thuật toán hữu hiệu giải các hệ tuyến tính đặc thù này thực sự là một yêu cầu cấp thiết.

Về mặt lý thuyết thuần túy, việc giải hệ phương trình tuyến tính là không khó. Tuy nhiên về mặt tính toán thực tiễn, việc thực hiện liên tục các phép tính với sự sai số, có thể biến một bài toán đơn giản thành một bài toán rất phức tạp nhiều khi là không thể thực hiện được.

Phương pháp truyền thống giải hệ phương trình tuyến tính không suy biến là rất hoàn hảo về mặt lý thuyết. Song trong thực tế các bài toán trong các lĩnh vực

khoa học kỹ thuật, cũng như trong lĩnh vực kinh tế đòi hỏi ngày một cao và cả tính ổn định trong tính toán.

Đặc biệt các phương pháp trực tiếp áp dụng cho các hệ tuyến tính lớn và thưa có thể dẫn đến các “fill-in” cao làm tràn bộ nhớ trong quá trình tính toán. Hơn nữa, ngày nay không có kỹ thuật hữu hiệu nào để tính “fill-in” cực tiểu. Gần đây, có một thuật toán xấp xỉ cho bài toán “fill-in” cực tiểu đã được đề xuất nhưng chưa rõ tính hiệu quả thực sự của nó. Mặt khác do sự tích lũy sai số trong quá trình tính toán nên các phương pháp giải trực tiếp thường kém ổn định. Trong các trường hợp như vậy, phương pháp lặp chiếm ưu thế và được sử dụng rộng rãi hơn.

Thông thường thì các phương pháp lặp tận dụng được tốt hơn tính thưa và tính đường chéo của ma trận đầu vào, cho phép bỏ qua các phần tử bằng 0 không cần thiết để giảm yêu cầu lưu trữ ở bộ nhớ, nhằm tăng cường khả năng tính toán cả về độ lớn và thời gian cho lớp các bài toán siêu kích cỡ và ma trận hệ số thưa. Để giải quyết những yêu cầu trên, em đã tìm một hướng tiếp cận mới để giải hệ phương trình tuyến tính cỡ lớn và sử dụng phương pháp lặp.

2. Mục đích của đề tài.

Nghiên cứu các thuật toán lặp và trên cơ sở đó đề xuất hướng tiếp cận thuật toán lặp mới giải hệ phương trình tuyến tính cỡ lớn và thưa.

3. Phạm vi nghiên cứu.

Nghiên cứu phương pháp lặp mới để giải hệ phương trình tuyến tính lớn và thưa.

4. Nội dung nghiên cứu của đề tài

- Tìm hiểu sự phát triển các phương pháp lặp như: phương pháp gradient liên hợp, Lanczos, phương pháp lặp Krylov,....
- Nghiên cứu các phương pháp chiếu trực giao liên tiếp của Cimmino, Kaczmarz,
- Tiến hành xây dựng thuật toán chiếu lặp mới, ứng dụng cho việc tìm nghiệm hệ phương trình tuyến tính cỡ lớn và các hệ gần thoái hóa.
 - Lập trình theo các modul của thuật toán đã xây dựng.
 - Tính toán chạy thử nghiệm trên các bộ dữ liệu chuẩn, đánh giá kết quả cụ thể.

5. Phương pháp nghiên cứu.

- Nghiên cứu các kiến thức cơ sở về hệ phương trình tuyến tính
- Nghiên cứu lý thuyết về các phương pháp lặp.
- Nghiên cứu lý thuyết về các phương pháp chiếu liên tiếp
- Nghiên cứu, xây dựng thuật toán lặp mới ứng dụng giải hệ tuyến tính lớn và thưa.
- Ngôn ngữ lập trình C/C++ trên môi trường Windows.

6. Bố cục của đề tài.

Luận văn được trình bày trong 50 trang, được chia làm 3 chương:

Chương I: Các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính.

Chương II: Phương pháp lặp.

Chương III: Phương pháp lặp mới tìm nghiệm hệ phương trình tuyến tính.

Kết luận.