

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐÀO DUY HẢO

**ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC
BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG TỔ HỢP**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

ĐÀO DUY HẢO

**ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC
BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG TỔ HỢP**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số: 60 46 01 13

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

Thái Nguyên, 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐÀO DUY HẢO

ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC BÀI
TOÁN CỰC TRỊ TRONG TỔ HỢP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐÀO DUY HẢO

ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CÁC BÀI
TOÁN CỰC TRỊ TRONG TỔ HỢP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số 60.46.01.13

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

THÁI NGUYÊN - NĂM 2014

Mục lục

Mở đầu	1
Chương 1. Tổ hợp và các hệ thức liên quan	3
1.1. Nguyên lý Dirichlet và một số bài toán áp dụng.....	3
1.2. Ý tưởng và lời giải tường minh một số bài toán tổ hợp.....	7
1.3. Cách xây dựng song ánh giải một số bài toán tổ hợp.....	14
1.4. Phương pháp thiết lập hệ thức truy hồi trong tổ hợp	20
1.5. Khai triển nhị thức Newton	27
1.6. Phương pháp quỹ đạo	28
1.7. Ứng dụng đẳng thức tổ hợp vào số học	30
Chương 2. Bất đẳng thức trong tổ hợp	33
2.1. Các bất đẳng thức cơ bản trong tổ hợp	33
2.2. Hệ phương trình và tính toán tổng.....	36
2.3. Công thức biến đổi ngược của tổng với tổ hợp	57
Chương 3. Một số dạng toán cực trị trong tập rời rạc và tổ hợp	63
3.1. Cực trị trên tập rời rạc	63
3.2. Một số dạng toán cực trị trong tổ hợp	65
Kết luận	77
Tài liệu tham khảo	78

Mở đầu

Ngay từ năm 1736, nhà toán học Euler đã giải quyết thành công bài toán tổ hợp về bảy cây cầu ở thành phố Königsberg, Đức (nay là Kaliningrad, Nga) nằm trên sông Pregel. Bài toán đặt ra là “Có thể đi theo một tuyến đường mà đi qua mỗi cây cầu đúng một lần rồi quay lại điểm xuất phát hay không?”. Và kể từ đó trải qua nhiều thăng trầm của lịch sử, lí thuyết tổ hợp vẫn phát triển mạnh mẽ và có nhiều ứng dụng trong khoa học và trong cuộc sống. Chúng ta thường gặp các bài toán tổ hợp trong thực tế như: Lập lịch cho một cơ quan, Đặt các trạm xe bus tối ưu nhất trong thành phố, thuật toán tìm kiếm của Google, Yahoo, ... hay các phần mềm ứng dụng mà chúng ta vẫn đang sử dụng hàng ngày. Chính vì vậy, tổ hợp luôn dành được sự quan tâm rất lớn từ các nhà toán học, các thầy, cô giáo và các bạn học sinh yêu thích môn toán.

Toán tổ hợp là dạng toán khó thường xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh, thành phố, cấp quốc gia, quốc tế. Mặc dù toán tổ hợp quan trọng như vậy nhưng các tài liệu về nó còn ít. Xuất phát từ thực tế đó, dưới sự định hướng và hướng dẫn nhiệt tình của GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu, tôi đã tiến hành nghiên cứu về đề tài “Đẳng thức, bất đẳng thức và các bài toán cực trị trong tổ hợp” nhằm góp một phần nhỏ bé vào việc bổ sung tài liệu tham khảo cho giáo viên và học sinh.

Cấu trúc luận văn gồm 3 chương:

Chương 1. Tổ hợp và các hệ thức liên quan

Chương 2. Bất đẳng thức tổ hợp

Chương 3. Một số dạng toán cực trị trong tập rời rạc và tổ hợp.

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn nhiệt tình của GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu, thầy đã giúp tôi hiểu sâu hơn về các khái niệm, thuật toán liên quan đến đề tài của mình. Tôi xin bày tỏ sự kính trọng và

lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn quý thầy cô trong trường ĐH Khoa học- Đại học Thái Nguyên, các thầy ở Viện Toán học, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội đã tận tình giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho chúng tôi có những kiến thức cơ sở đủ vững để thực hiện đề tài.

Trong quá trình biên không tránh khỏi những sai sót, tôi rất mong nhận được ý kiến đóng góp của độc giả để đề tài được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn.

Chương 1

Tổ hợp và các hệ thức liên quan

1.1. Nguyên lý Dirichlet và một số bài toán áp dụng

Nguyên lý Dirichlet (thuật ngữ tiếng Anh: *the pigeonhole principle*, cũng có nơi gọi là *the drawer principle*) - ở dạng đơn giản nhất - được phát biểu đầu tiên bởi G.Lejeune Dirichlet (1805-1859), một nhà toán học Đức gốc Pháp, như sau:

"Nếu nhốt $n + 1$ con thỏ vào n cái chuồng ($n \in \mathbb{N}^*$) thì luôn có (ít nhất là) hai con thỏ bị nhốt trong cùng một chuồng".

Một cách tổng quát, ta có nguyên lý Dirichlet mở rộng:

"Nếu nhốt m con thỏ vào n cái chuồng ($m, n \in \mathbb{N}^*$) thì luôn tồn tại một chuồng chứa ít nhất là $1 + \left\lceil \frac{m-1}{n} \right\rceil$ con thỏ".

Ở đây, ký hiệu $[a]$ được dùng để chỉ phần nguyên của số thực a tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá a .

Dùng phương pháp phản chứng, ta có thể đưa ra một cách chứng minh khá ngắn gọn cho nguyên lý Dirichlet (ngay cả dưới dạng mở rộng); học sinh THPT cũng có thể làm được việc này; và điều đó không hề làm giảm đi giá trị của bản thân nguyên lý. Nguyên lý Dirichlet có rất nhiều ứng dụng (hiệu quả đến bất ngờ): sử dụng nó, ta có thể chứng minh được nhiều kết quả sâu sắc của toán học. Chính vì vậy, tại các cuộc thi học sinh giỏi toán (quốc gia và quốc tế), nguyên lý Dirichlet thường xuyên được khai thác. Để minh họa, dưới đây, ta xét một số bài toán cụ thể.

Bài toán 1.1. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên gồm toàn số 1 chia hết cho 2011.

Lời giải.

Xét dãy số gồm 2012 số hạng như sau: 1, 11, 111, ..., $\underbrace{11\dots1}_{2012}$ Rõ ràng trong 2012 số này tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 2011. Suy ra hiệu của chúng chia hết cho 2011. Giả sử hai số đó là $\underbrace{11\dots1}_{k-so}$ và $\underbrace{11\dots1}_{n-so}$. Hiệu của hai số này là $\underbrace{11\dots1}_{n-k(so)} \cdot 10^k$ với $(n > k)$ Mà ta có $(2011, 10^k) = 1$.

Do đó $\underbrace{11\dots1}_{n-k(so)} : 2011$.

Bài toán được chứng minh.

Bài toán 1.2. [*Vô địch Cộng hoà Czech 1998*] Cho X là một tập hợp gồm 14 số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng có một số nguyên dương $k \leq 7$ và có hai tập con k -phần tử:

$$\{a_1; a_2; \dots; a_k\}, \{b_1; b_2; \dots; b_k\}$$

rời nhau của X sao cho

$$\left| \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} \right) - \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_k} \right) \right| < \frac{1}{1000}.$$

Lời giải.

Xét $C_{14}^7 = 3432$ tập con 7-phần tử của X . Tổng (các) nghịch đảo của các phần tử trong mỗi tập con này rõ ràng là không vượt quá $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{7} < 2,6$ nên phải thuộc vào một trong số 2600 nửa khoảng:

$$\left(\frac{0}{1000}; \frac{1}{1000} \right], \left(\frac{1}{1000}; \frac{2}{1000} \right], \dots, \left(\frac{2599}{1000}; \frac{2600}{1000} \right].$$

Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai tập con khác nhau có tổng nghịch đảo các phần tử thuộc vào cùng một nửa khoảng. Loại bỏ khỏi hai tập con đó các phần tử chung (hai tập con 7-phần tử khác nhau thì có tối đa sáu phần tử chung), ta sẽ thu được hai tập con k -phần tử (với k nguyên dương, $k \leq 7$), thoả yêu cầu của bài toán: hiệu của hai tổng nghịch đảo các phần tử trong hai tập con này sẽ sai khác nhau ít hơn $1/1000$.

Bài toán 1.3. [*VMO-2004*] Cho tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 16\}$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

Lời giải.

Ta thấy, nếu a, b cùng chẵn thì $a^2 + b^2$ là hợp số. Do đó tập con X của A có hai phần tử phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố thì X không thể chỉ chứa các số chẵn. Suy ra $k \geq 9$. Ta chứng tỏ $k = 9$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm. Điều đó có nghĩa là với mọi tập con X gồm 9 phần tử bất kì luôn tồn tại hai phần tử phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố. Để chứng minh khẳng định trên ta chia tập A thành các cặp hai phần tử phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố, ta có tất cả 8 cặp

(1; 4), (2; 3), (5; 8), (6; 11), (7; 10), (9; 16), (12; 13), (14; 15).

Theo nguyên lí Dirichlet thì trong 9 phần tử của X có hai phần tử thuộc cùng một cặp và ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 1.4. [*Trích đề chọn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO, 1999*] Cho $\mathcal{A} = \{a_1; a_2; a_3; \dots\} \subset \mathbb{N}^*$ thoả mãn điều kiện $1 \leq a_{p+1} - a_p \leq 1999$ với mọi $p \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng tồn tại cặp chỉ số p, q với $p < q$ sao cho a_p/a_q .

Lời giải.

Đặt $A(1; j) := a_1 + j - 1$ với mọi j nguyên dương mà $j \leq 1999$ và bằng quy nạp, ta định nghĩa:

$$B_i := \prod_{k=1}^{1999} A(i-1; k), A(i; j) := B_i + A(i-1; j)$$

với mọi i, j nguyên dương mà $i \geq 2, j \leq 1999$. Từ cách xây dựng trên, dễ dàng chứng minh $A(m; j) < A(n; j), A(m; j)/A(n; j)$ với mọi bộ ba số nguyên dương m, n, j mà $j \leq 1999$ và $m < n$. Từ cách xây dựng trên, cũng dễ thấy (với mỗi $i \in \mathbb{N}^* : A(i; 1), A(i; 2), \dots, A(i; 1999)$) là 1999 số nguyên dương liên tiếp (không bé hơn a_1) do đó, theo giả thiết của bài toán về tập hợp \mathcal{A} , thì tồn tại $j_i \in \mathbb{Z} \cap [1; 1999]$ để $A(i; j_i) \in \mathcal{A}$.

Bấy giờ, vì $j_1, j_2, \dots, j_{2000} \in \mathbb{Z} \cap [1; 1999]$, nên theo nguyên lí Dirichlet, có hai số nguyên dương $m < n \leq 2000$ mà $j_m = j_n =: j$; với chúng, ta tìm được cặp chỉ số $p < q$ sao cho

$$a_p = A(m; j_m) = A(m; j) | A(n; j) = A(n; j_n) = a_q \quad (\text{đpcm}).$$