

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐOÀN KHẮC THÀNH

PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN
NHIỆT MỘT CHIỀU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2014

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐOÀN KHẮC THÀNH

PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN
NHIỆT MỘT CHIỀU

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG
Mã số: 60 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. NGUYỄN VĂN NGỌC

THÁI NGUYÊN - 2014

Mục lục

Mở đầu	1
1 Cơ sở nhiệt học và phương trình truyền nhiệt	4
1.1 Khái niệm về nhiệt độ	4
1.2 Nhiệt năng-Nhiệt lượng	5
1.2.1 Nhiệt năng	5
1.2.2 Nhiệt lượng	5
1.2.3 Trao đổi nhiệt	6
1.3 Dòng nhiệt- Định luật Fourier	7
1.3.1 Dòng nhiệt	7
1.3.2 Định luật Fourier	7
1.4 Các nguyên lý của nhiệt động lực học	7
1.4.1 Nguyên lý thứ nhất	7
1.4.2 Nguyên lý thứ hai	8
1.4.3 Nguyên lý thứ ba	8
1.5 Phương trình truyền nhiệt và các bài toán	9
1.5.1 Thành lập phương trình	9
1.5.2 Các điều kiện biên và điều kiện đầu	10
1.5.3 Bài toán đặt chính	10
2 Chuỗi Fourier và các bài toán Sturm-Liouville	12
2.1 Chuỗi Fourier thông thường	12
2.1.1 Khái niệm về chuỗi Fourier	12
2.1.2 Hội tụ của chuỗi Fourier	13
2.2 Chuỗi Fourier - Cosin và chuỗi Fourier- Sin	13
2.2.1 Khái niệm	13
2.2.2 Sự hội tụ	14
2.3 Hội tụ của chuỗi Fourier trong L^2	15

2.3.1	Dãy trực giao	15
2.3.2	Bất đẳng thức Bessel- Định lý Parseval	16
2.4	Khái niệm về bài toán Sturm-Liouville	19
2.4.1	Khái niệm	19
2.4.2	Tính chất	21
2.5	Một số ví dụ về hàm riêng và trị riêng cho toán tử vi phân cấp hai trên khoảng hữu hạn	22
2.5.1	Các ví dụ đơn giản	22
2.5.2	Các ví dụ phức tạp hơn	25
3	Phương trình truyền nhiệt trên khoảng hữu hạn	30
3.1	Tích phân năng lượng và tính duy nhất nghiệm	30
3.1.1	Tích phân năng lượng	30
3.1.2	Tính duy nhất nghiệm của phương trình truyền nhiệt	31
3.2	Nguyên lý cực trị đối với phương trình truyền nhiệt	31
3.2.1	Bài toán Dirichlet cho phương trình truyền nhiệt	31
3.2.2	Nguyên lý cực trị đối với phương trình truyền nhiệt của thanh	32
3.2.3	Một số kết quả khác liên quan đến nguyên lý cực trị của phương trình truyền nhiệt	34
3.3	Phương trình thuần nhất (Truyền nhiệt trong thanh hữu hạn)	37
3.4	Truyền nhiệt trong hình trụ tròn xoay	43
3.5	Nguyên lý Duhamel	45
3.5.1	Phương trình vi phân thường	45
3.5.2	Phương trình truyền nhiệt	46
3.6	Phương trình truyền nhiệt không thuần nhất trên khoảng hữu hạn với các điều kiện biên thuần nhất	46
3.7	Trường hợp phương trình và các điều kiện biên không thuần nhất	52
3.8	Những thay đổi của bài toán truyền nhiệt cơ bản	54
3.8.1	Điều kiện biên	54
3.8.2	Giải bài toán truyền nhiệt với điều kiện biên không thuần nhất (độc lập thời gian)	56
4	Phương pháp biến đổi Fourier giải bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt	58
4.1	Định nghĩa biến đổi Fourier và các tính chất	58

4.1.1	Biến đổi Fourier trong $L^1(\mathbb{R})$	58
4.1.2	Các tính chất của biến đổi Fourier	59
4.1.3	Biến đổi Fourier trong $L^2(\mathbb{R})$	61
4.2	Tính duy nhất nghiệm của phương truyền nhiệt trong thanh dài vô hạn	62
4.3	Bài toán Cauchy cho phương truyền nhiệt trong thanh dài vô hạn	64
4.3.1	Công thức Poisson	64
4.3.2	Nghiệm cơ bản của phương trình truyền nhiệt	68
4.4	Bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt không thuần nhất	69
	Kết luận	73
	Tài liệu tham khảo	74

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết phương trình đạo hàm riêng có mối quan hệ trực tiếp về lý thuyết với các bài toán vật lý. Quá trình nghiên cứu các phương trình đạo hàm riêng thường gặp trong vật lý đã dẫn tới việc hình thành một ngành mới của giải tích, phương trình vật lý toán vào giữa thế kỷ XVIII. Các phương pháp nghiên cứu và giải quyết các bài toán cụ thể của vật lý toán đối với các bài toán về phương trình truyền nhiệt có ảnh hưởng rất lớn đến sự phát triển tổng quát phương trình đạo hàm riêng vào cuối thế kỷ XIX. Điển hình là phương pháp biến đổi Fourier để giải bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt của nhà toán học và nhà vật lý nổi tiếng người Pháp Joseph Fourier (21/3/1768 - 16/5/1830).

Bên cạnh đó, lý thuyết phương trình đạo hàm riêng cũng có mối quan hệ mật thiết với các ngành toán học khác như giải tích hàm và lý thuyết hàm, tô pô, đại số, giải tích phức. Một mặt lý thuyết phương trình đạo hàm riêng sử dụng rộng rãi các khái niệm cơ bản, phương pháp của các lĩnh vực toán học này, mặt khác nó cũng ảnh hưởng lại các vấn đề và hướng nghiên cứu của chúng.

Phương trình truyền nhiệt là một trong những phương trình cơ bản và quan trọng của lý thuyết các phương trình đạo hàm riêng và vật lý toán. Phương trình truyền nhiệt mô tả các hiện tượng về sự truyền nhiệt trong các vật, sự khuếch tán của các phân tử không khí, sự truyền tải các tạp chất trong khí quyển, v.v., và thuộc dạng parabolic. Các bài toán đối với các phương trình thuộc dạng parabolic thường là rất khó vì cùng với các biến không gian nó còn chứa biến thời gian, nhất là các phương trình nhiều chiều, hay phi tuyến. Do tính phức tạp nói trên, nhiều tính chất quan trọng và lý thú của nghiệm các phương trình truyền nhiệt chủ yếu được phát hiện đối với phương trình truyền nhiệt cấp hai và có số chiều thấp. Một số hiện tượng nhiệt có số chiều bất kỳ có thể được nghiên cứu một cách tương tự như đối với trường hợp một chiều.

Trong thực tế có nhiều hiện tượng của cơ học và vật lý được mô tả dưới dạng phương trình truyền nhiệt tuyến tính cấp hai một chiều. Do đó việc tìm hiểu

sâu hơn về phương trình truyền nhiệt thông qua phương trình truyền nhiệt cấp hai một chiều là cần thiết. Đó chính là đề tài học tập và nghiên cứu của luận văn này.

2. Phương pháp nghiên cứu

Sưu tầm và đọc các tài liệu, giáo trình trong nước và quốc tế liên quan đến phương trình truyền nhiệt và phương pháp giải phương trình truyền nhiệt.

3. Mục đích của luận văn

Mục đích của luận văn là học tập, nghiên cứu sâu hơn về phương trình truyền nhiệt và trình bày lý thuyết của phương trình truyền nhiệt không gian một chiều với các vấn đề liên quan như: Cơ sở nhiệt học và phương trình truyền nhiệt; chuỗi Fourier và các bài toán Sturm-Liouville; phương trình truyền nhiệt trên khoảng hữu hạn và phương pháp biến đổi Fourier giải bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt.

4. Bố cục của luận văn

Luận văn bao gồm phần mở đầu, bốn chương nội dung chính, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1: Cơ sở nhiệt học và phương trình truyền nhiệt

Chương này trình bày các khái niệm về nhiệt độ, nhiệt năng, các nguyên lý của nhiệt động lực học; giới thiệu Định luật Fourier về dòng nhiệt, trên cơ sở đó thành lập phương trình truyền nhiệt; trình bày các bài toán biên-giá trị ban đầu đối với phương trình truyền nhiệt.

Chương 2: Chuỗi Fourier và các bài toán Sturm-Liouville

Chương này trình bày những kiến thức bổ trợ cần thiết cho các vấn đề như: Chuỗi Fourier và khai triển chuỗi Fourier theo các hàm riêng của các bài toán Sturm-Liouville có nhiều ứng dụng trong phương pháp tách biến giải các bài toán biên của các phương trình đạo hàm riêng.

Chương 3: Phương trình truyền nhiệt trên khoảng hữu hạn

Trong chương này trình bày phương trình truyền nhiệt cấp hai một chiều thuần nhất và không thuần nhất. Những vấn đề cơ bản được đề cập trong tích phân năng lượng và ứng dụng vào chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình truyền nhiệt, nguyên lý cực trị và các ứng dụng. Nội dung chính của chương này là trình bày phương pháp tách biến giải các bài toán biên của phương trình truyền nhiệt thuần nhất và không thuần nhất trên khoảng hữu hạn. Nội dung của chương trình bày nhiều ví dụ cụ thể để minh họa.

Chương 4: Phương pháp biến đổi Fourier giải bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt

Chương này trình bày lý thuyết tóm lược của biến đổi Fourier trong các không gian $L^1(\mathbb{R})$ và $L^2(\mathbb{R})$. Nội dung chính của chương này là vận dụng biến đổi Fourier giải bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt thuần nhất mà mấu chốt là công thức Poisson. Tiếp đó là trình bày công thức nghiệm và tính trơn của nghiệm của bài toán Cauchy đối với phương trình truyền nhiệt không thuần nhất.

Nội dung của luận văn này được hình thành chủ yếu từ các tài liệu [1] - [7] dưới sự hướng dẫn tận tình và nghiêm khắc của Thầy Nguyễn Văn Ngọc, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học Việt Nam. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến Thầy!

Em xin chân thành cảm ơn các thầy cô của trường Đại học Khoa học Thái Nguyên, các thầy cô giảng dạy lớp cao học Toán K6D trường Đại học Khoa học Thái Nguyên, Phòng đào tạo trường Đại học Khoa học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ chúng em trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn này!

Thái Nguyên, ngày 15 tháng 4 năm 2014
Tác giả

Đoàn Khắc Thành

Chương 1

Cơ sở nhiệt học và phương trình truyền nhiệt

Chương này trình bày cơ sở nhiệt học và phương trình truyền nhiệt. Các kiến thức của chương này chủ yếu được trích ra từ tài liệu [5].

1.1 Khái niệm về nhiệt độ

Nhiệt phát sinh từ nhiều nguồn, thí dụ như, lửa, ánh sáng, điện hay khi va chạm, hoặc cọ xát giữa các vật. Nhiệt độ là một khái niệm vật lý dùng để mô tả cảm nhận nhiệt của một vật khi nó tiếp xúc với nguồn nhiệt, được dùng để đo mức độ nhiệt. Thí dụ, như buổi trưa ta cảm thấy ấm do cơ thể hấp thụ năng lượng nhiệt từ ánh sáng mặt trời.

Nhiệt độ là đơn vị đo lường cho biết mức độ nhiệt đo bằng đơn vị độ ($^{\circ}$). Có ba hệ thống đo lường nhiệt độ: nhiệt độ C(Celsius), nhiệt độ K (Kelvin) và nhiệt độ F (Fahrenheit). Các hệ thống nhiệt độ này được chuyển đổi như sau:

$$1K = 1^{\circ}C, \quad K = ^{\circ}C + 273, \quad ^{\circ}F = ^{\circ}C \times 1,8 + 32.$$

- Vào năm 1742, nhà thiên văn học người Thụy Điển là Anders Celsius đề xuất một thang nhiệt độ, trong đó băng tan ở 0° và nước sôi ở 100° . Người ta gọi thang nhiệt độ này là thang bách phân vì có 100 độ chia giữa hai điểm cố định đã nói. Nhiệt độ trên thang độ này là $^{\circ}C$. Nhược điểm của thang nhiệt Celsius là nhiệt độ thấp hơn nhiệt độ đóng băng trên lý thuyết của nước có giá trị âm.
- Độ Fahrenheit được nghĩ ra vào đầu Thế kỷ XVIII. Trên thang đo này, điểm băng là 32° và điểm hơi nước là 212° . Thang đo Fahrenheit thỉnh thoảng vẫn được sử dụng trên bản tin thời tiết ở Mỹ, còn trong khoa học nó đã thuộc về lịch sử.
- Vào năm 1846, William Thomson (sau này là huân tước Kelvin, nước Anh)

đề xuất một thang đo nhiệt độ bắt đầu tại nhiệt độ thấp nhất có thể có trên lý thuyết, độ không tuyệt đối. Thang đo nhiệt này được gọi là nhiệt giai tuyệt đối, hay nhiệt giai Kelvin. Các độ chia trên thang đo này được gọi là Kelvin và được ký hiệu là K (không phải là $^{\circ}K$). Một độ chia Kelvin bằng cỡ với một độ chia Celsius, tức là $K = ^{\circ}C$.

1.2 Nhiệt năng-Nhiệt lượng

1.2.1 Nhiệt năng

Nhiệt năng, hay còn gọi là nhiệt, là dạng năng lượng dự trữ trong vật chất nhờ vào sự chuyển động hỗn loạn của các hạt vật chất cấu tạo nên vật.

Trong vật chất, các phân tử chuyển động hỗn loạn không ngừng, do đó chúng có động năng. Động năng này bao gồm động năng chuyển động của khối tâm của các phân tử, cộng với động năng trong dao động của các nguyên tử cấu tạo nên phân tử quanh khối tâm của chúng.

Nhiệt năng có quan hệ chặt chẽ với nhiệt độ. Nhiệt độ của vật càng cao thì các phân tử cấu tạo nên vật chuyển động càng nhanh, nên nhiệt năng của vật càng lớn. Nhiệt năng có thể được trao đổi giữa các vật, hay giữa các hệ thống do sự khác biệt về nhiệt độ.

Nhiệt cũng giống như công, luôn gắn liền với các quá trình biến đổi. Vì vậy có thể coi nhiệt là một đại lượng quá trình, khác với các đại lượng trạng thái.

1.2.2 Nhiệt lượng

Nhiệt năng có thể được tạo ra hoặc thay đổi. Lượng nhiệt năng dự trữ hay chuyển tải trên các vật còn được gọi là nhiệt lượng và thường được ký hiệu trong các tính toán bằng chữ Q .

Nhiệt lượng chỉ truyền từ nơi có nhiệt độ cao sang nơi có nhiệt độ thấp hơn. Giả sử một vật đồng chất có nhiệt độ T_0 , khi hấp thụ nhiệt, nhiệt độ của vật sẽ là T . Thay đổi nhiệt độ trên vật là $\Delta T = T - T_0$. Nếu khối lượng của vật là $m(\text{kg})$, nhiệt dung riêng của chất làm vật là $c(\text{J/kgK})$. Khi đó vật sẽ hấp thụ một nhiệt lượng là:

$$Q = cm\Delta T \text{ (J)}. \quad (1.1)$$

Dạng vi phân của nhiệt lượng

$$dQ = cmdT. \quad (1.2)$$